Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2015
Harjoitus 2

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 6.11.2015 klo 19.30
Korjausten viimeinen palautuspäivä: pe 20.11.2015 klo 19.30

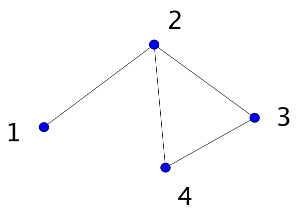
Tehtäväsarja I

1.* Onko joukko
$$W = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \mid a_1 a_3 = 0\}$$
vektoriavaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruus? Käytä aliavaruuden määritelmää 16.1.

2.* Onko joukko
$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \;\middle|\; a_{11} - a_{21} - a_{12} = 0 \right\}$$
vektoriavaruuden $\mathbb{R}^{2\times 2}$ aliavaruus? Käytä aliavaruuden määritelmää 16.1.

Tehtäväsarja II

3. Neljän kaupungin välillä kulkee lentoreittejä oheisen kaavion mukaisesti. Tilannetta voidaan havainnollistaa 4×4-matriisilla A, joka määritetään seuraavasti: $A(i, j) = 1$, jos kaupunkien i ja j välillä on suora lentoreitti, ja $A(i, j) = 0$, jos suoraa lentoreittiä ei ole. (Kaupungista itseensä ei ajatella olevan suoraa lentoreittiä.)



(a) Kirjoita lentoreittiverkostoa vastaava matriisi A.
(b) Laske matriisipotenssi A^2. Mitä sen alkiot kertovat erilaisista reittivaihtoehdoista? (Vastausta ei tarvitse perustella täsmällisesti.)
(c) Oletetaan, että $n \in \{1, 2, \dots\}$. Mitä arvelet potenssin A^n kertovan lentoreiteistä?
(d) Lisätehtävä: Perustele kohtien b ja c vastaukset.

Tehtäväsarja III

Lineaarikuvaukset ovat kuvauksia vektoriavaruudelta toiselle. Ryhdy tutustumaan lukuun 19, jossa ne esitellään.

4. Tutki, ovatko seuraavat funktiot lineaarikuvauksia. Käytä lineaarikuvauksen määritelmää 19.1. Piirrä lisäksi koordinaatistoon kummankin funktion kuvaaja.

(a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jolle $f(x) = -2x$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

(b) $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jolle $g(x) = 2 - x$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

5. Tutkitaan kuvausta $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1^2 + x_2,\ x_2 + x_3)$.

   (a) Määritä vektorien $(-1, 0, 1)$ ja $(3, -5, -2)$ kuvavektorit kuvauksessa L.

   (b) Onko L lineaarikuvaus?

6. Onko kuvaus $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$, $L(x_1, x_2) = (x_1,\ x_1 + x_2,\ x_2,\ 2x_1)$ lineaarikuvaus?

7. Olkoon $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineaarikuvaus, jolle pätee $L(1, 0) = (3, -1)$ ja $L(0, 1) = (2, 4)$.

   (a) Määritä $L(5, -6)$.

   (b) Oletetaan, että $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Määritä $L(x_1, x_2)$.

Tehtäväsarja IV

8. Lauseen 19.8 mukaan jokainen matriisi määrää lineaarikuvauksen. Tarkastellaan matriisia

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 2 & -1 & 3 \\ 9 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & -5 & 6 & 7 \end{bmatrix}.$$

   (a) Matriisi A määrää lineaarikuvauksen $L_A\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$. Mitä lukuja p ja q ovat?

   (b) Oletetaan, että $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p$. Laske kuvavektori $L_A(\bar{x})$.

   (c) Kirjoita b-kohdan kuvavektori $q \times 1$-matriisina ja vertaa sitä matriisiin A. Huomaatko mitään yhtäläisyyksiä?

9. Eräs matriisi B määrää lineaarikuvauksen $L_B\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, jolla

$$(x_1, x_2) \mapsto (4x_1 - 5x_2, 3x_2, x_1 + 8x_2).$$

   Mikä matriisi B on?

10. Tässä tehtävässä tarvitaan lukua 19.2, jossa käsitellään aliavaruuden kuvaa lineaarikuvauksessa. Tarkastellaan tehtävän 9 lineaarikuvausta $L_B\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Merkitään $\bar{w} = (1, 2)$.

    (a) Havainnollista koordinaatistossa lähtöavaruuden $\mathbb{R}^2$ aliavaruutta $W = \operatorname{span}(\bar{w})$.

    (b) Keksi kolme vektoria, jotka kuuluvat aliavaruuden W kuvaan $L_B W$.

    (c) Määritä joukko $L_B W$.

    (d) Havainnollista joukkoa $L_B W$ omin sanoin tai piirtämällä.

Tehtäväsarja V

Jatka tutustumista lukuihin 17 ja 18, joissa käsitellään vapautta ja kantaa.

Tehtävissä 11–13 tarkastellaan matriiseja

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ A_4 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

11. Onko jono (A_1, A_2, A_3, A_4) vapaa? Käytä vapauden määritelmää 17.1.

12. Palauta mieleesi kannan ja dimension käsitteet. Tutustu myös lauseeseen 18.13.

    (a) Mikä on avaruuden $\mathbb{R}^{2\times 2}$ dimensio?

    (b) Onko jono (A_1, A_2, A_3, A_4) vektoriavaruuden $\mathbb{R}^{2\times 2}$ kanta?

    (c) Virittävätkö vektorit A_1, A_2, A_3 ja A_4 vektoriavaruuden $\mathbb{R}^{2\times 2}$?

13. Merkitään $\mathcal{B} = (A_1, A_2, A_3, A_4)$. Edellisten tehtävien perusteella tiedetään, että $\mathcal{B}$ on avaruuden $\mathbb{R}^{2\times 2}$ kanta. Määritä matriisi C, jonka koordinaattivektori kannan $\mathcal{B}$ suhteen on $(2, 7, 1, 8)$. Toisin sanoen määritä matriisi C, jolle pätee $[C]_{\mathcal{B}} = (2, 7, 1, 8)$.

14.* Tutkitaan vektoriavaruutta $\mathcal{P}_2$. Merkitään $\mathcal{E} = (1, x, x^2)$ ja $\mathcal{B} = (-2x,\ x^2 + 4x,\ 3)$.

    (a) Tiedetään, että $\mathcal{E}$ on avaruuden $\mathcal{P}_2$ kanta. Osoita, että myös $\mathcal{B}$ on avaruuden $\mathcal{P}_2$ kanta.

    (b) Merkitään $p = x^2 + x + 1$. Määritä $[p]_{\mathcal{E}}$ eli polynomin $x^2 + x + 1$ koordinaattivektori kannan $\mathcal{E}$ suhteen.

    (c) Määritä $[p]_{\mathcal{B}}$ eli polynomin $x^2 + x + 1$ koordinaattivektori kannan $\mathcal{B}$ suhteen.

15. Tässä tehtävässä käsitellään funktioiden muodostamaa vektoriavaruutta $\mathcal{F}$. Tutkitaan funktioita

$$
\begin{aligned}
f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, &\quad f(x) = 2x^2 - 4x + \sin(x) \quad \text{ja} \\
g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, &\quad g(x) = e^x + x \\
h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, &\quad h(x) = \frac{1}{2}\sin(x) - 5e^x + x^2 - 7x.
\end{aligned}
$$

    Merkitään $W = \operatorname{span}(f, g, h)$.

    (a) Keksi kolme aliavaruuden W alkiota, jotka poikkeavat alkioista f, g ja h.

    (b) Keksi jokin vektoriavaruuden $\mathcal{F}$ alkio, joka ei ole aliavaruudessa W.

    (c) Voidaan osoittaa, että $\mathcal{B} = (f, g)$ on aliavaruuden W kanta. Minkä vektorin koordinaattivektori kannan $\mathcal{B}$ suhteen on $(-2, 4)$?

Tehtäväsarja VI

16. Tutkitaan jälleen joukkoa $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$, jossa yhteenlasku $\oplus$ ja skalaarikertolasku $\odot$ on määritelty seuraavasti: jos x, $y \in \mathbb{R}_+$ ja $c \in \mathbb{R}$, niin

$$x \oplus y = x \cdot y \quad \text{ja} \quad c \odot x = x^c.$$

    (a) Esitä vektoriavaruuden määritelmän ehto 6 käyttäen vektorien yhteenlaskulle ja skalaarikertolaskulle merkintöjä $\oplus$ ja $\odot$.

    (b) Osoita, että vektoriavaruuden määritelmän ehto 6 pätee joukossa $\mathbb{R}_+$, kun se on varustettu yhteenlaskulla $\oplus$ ja skalaarikertolaskulla $\odot$.

    (c) Osoita, että vektoriavaruuden määritelmän ehto 7 pätee joukossa $\mathbb{R}_+$, kun se on varustettu yhteenlaskulla $\oplus$ ja skalaarikertolaskulla $\odot$.

Ylimääräinen tehtävä

Tämä tehtävä on hieman haastavampi. Sillä tehtävällä voi korvata minkä tahansa tähdettömän tehtävän.

17. Ensimmäisen asteen homogeeninen lineaarinen differentiaaliyhtälö on muotoa

$$y' + ay = 0. \tag{1}$$

Sen ratkaisulla tarkoitetaan derivoituvaa funktiota $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto y(t)$, joka toteuttaa kyseisen yhtälön kaikilla muuttujan t arvoilla. Esimerkiksi $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = e^{-at}$ on yksi ratkaisu, sillä sen derivaatalle pätee $f'(t) = -ae^{-at}$ ja siten

$$f'(t) + af(t) = -ae^{-at} + ae^{-at} = 0.$$

(a) Tarkastellaan kaikkien funktioiden $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ muodostamaa vektoriavaruutta $\mathcal{F}$ (ks. esimerkki 15.6). Olkoon differentiaaliyhtälön (1) ratkaisujen joukko S eli

$$S = \{y \in \mathcal{F} \mid y' + ay = 0\}.$$

Osoita, että joukko S on vektoriavaruuden $\mathcal{F}$ aliavaruus. Derivointisääntöjä saa käyttää.

(b) Osoita, että tehtävässä 17 mainittu funktio f, jolle $f(t) = e^{-at}$, muodostaa aliavaruuden $S = \{y \in \mathcal{F} \mid y' + ay = 0\}$ kannan. Päättele tästä, että $\dim(S) = 1$.

Vihje: Oleta, että $x \in S$. Tarkastele funktion $z\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $z(t) = x(t)e^{at}$ derivaattaa. Mitä voit sen perusteella päätellä funktiosta x?