Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2015
Harjoitus 1

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 30.10.2015 klo 16.00 (rakennus suljetaan klo 16.00)
Korjausten viimeinen palautuspäivä: pe 13.11.2015 klo 19.30

Käytä tehtävien palauttamisessa uutta kurssitunnusta. Saat sen sähköpostitse.

Tehtäväsarja I

Tutustu kurssimateriaalin lukuun 15. Siinä laajennamme avaruuden $\mathbb{R}^n$ käsitteen yleisemmäksi vektoriavaruuden käsitteeksi.

1. Tutkitaan vektoriavaruutta $\mathbb{R}^{2\times 2}$, jonka muodostavat 2×2-matriisit. Matriisien yhteenlasku ja skalaarikertolasku määritellään kuten ennenkin.

   (a) Mikä on tämän vektoriavaruuden nollavektori? Perustele vastauksesi osoittamalla, että se toteuttaa vektoriavaruuden määritelmän 15.1 ehdossa 3 esiintyvän yhtälön.

   (b) Merkitään
   $$M = \begin{bmatrix} \pi & 2{,}7 \\ -\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}.$$
   Mikä on matriisin (tai vektorin) M vastavektori? Perustele vastauksesi osoittamalla, että se toteuttaa vektoriavaruuden määritelmän 15.1 ehdossa 4 esiintyvän yhtälön.

2. (a) Piirrä kuva joukosta $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$.

   (b) Osoita, että vektorien tavallinen yhteenlasku ei ole joukossa K määritelty laskutoimitus.

   (c) Osoita, että vektorien tavallinen skalaarikertolasku ei ole määritelty joukossa K.

   (d) Totea, että K varustettuna vektorien tavallisella yhteenlaskulla ja skalaarikertolaskulla ei ole vektoriavaruus.

3. Rationaalilukujen joukon $\mathbb{Q} = \{m/n \mid m, n \in \mathbb{Z} \text{ ja } n \neq 0\}$ muodostavat luvut, jotka voidaan kirjoittaa murtolukumuodossa. Osoita, että joukko $\mathbb{Q}$ ei ole vektoriavaruus, kun yhteenlasku on lukujen tavallinen yhteenlasku ja skalaarikertolasku lukujen tavallinen kertolasku.

4. Esimerkistä 15.6 käy ilmi, että myös funktiot $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ muodostavat vektoriavaruuden, jota tällä kurssilla merkitään $\mathcal{F}$.

   (a) Yksi tämän vektoriavaruuden alkio (eli vektori) on funktio f, jolle $f(x) = 2x - 3$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Piirrä koordinaatistoon funktion f kuvaaja.

   (b) Millainen on tämän vektoriavaruuden $\mathcal{F}$ nollavektori? Piirrä myös sen kuvaaja koordinaatistoon.

(c) Millainen on a-kohdan vektorin f vastavektori $-f$? Piirrä sen kuvaaja samaan koordinaatistoon kuin f:n kuvaaja.

(d) Olkoon g funktio, jolla $g(x) = -3x + 5$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Millainen on summavektori $f + g$? Piirrä myös sen kuvaaja koordinaatistoon.

Tehtäväsarja II

Määritellään positiivisten reaalilukujen joukossa $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ yhteenlasku $\oplus$ ja skalaarikertolasku $\odot$ seuraavasti: jos x, $y \in \mathbb{R}_+$ ja $c \in \mathbb{R}$, niin

$$x \oplus y = x \cdot y \quad \text{ja} \quad c \odot x = x^c.$$

Voidaan osoittaa, että joukko $\mathbb{R}_+$ varustettuna yhteenlaskulla $\oplus$ ja skalaarikertolaskulla $\odot$ on vektoriavaruus. Tähän paneudutaan seuraavissa tehtävissä.

5. (a) Laske $3 \oplus 4$ ja $-3 \odot 2$.
   (b) Mieti, mikä on joukon $\mathbb{R}_+$ alkoista on nollavektori. Tähän kohtaan voit rauhassa luonnostella pohdintojasi ja laskujasi, eikä niiden tarvitse olla täsmällisiä tai edes oikein. Kirjoita kuitenkin selkeästi näkyviin, mikä joukon $\mathbb{R}_+$ alkoista on mielestäsi nollavektori.
   (c) Osoita täsmällisesti nollavektorin määritelmän perusteella, että löytämäsi vektori todellakin on vektoriavaruuden $\mathbb{R}_+$ nollavektori. Toisin sanoen näytä, että se toteuttaa vektoriavaruuden määritelmän 15.1 ehdossa 3 esiintyvän yhtälön.

6.*

   (a) Mieti, mikä joukon $\mathbb{R}_+$ alkoista on vektorin 5 vastavektori. Tähän kohtaan voit rauhassa luonnostella pohdintojasi ja laskujasi, eikä niiden tarvitse olla täsmällisiä tai edes oikein. Kirjoita kuitenkin selkeästi näkyviin, mikä joukon $\mathbb{R}_+$ alkoista on mielestäsi vektorin 5 vastavektori.
   (b) Osoita täsmällisesti vastavektorin määritelmän perusteella, että löytämäsi vektori todellakin on vektorin 5 vastavektori.
   (c) Lauseen 15.10 mukaan minkä tahansa vektoriavaruuden vektorille $\bar{v}$ pätee $0\bar{v} = \bar{0}$. Tarkista laskemalla, että tämä on totta vektoriavaruuden $\mathbb{R}_+$ vektorille $\bar{v} = 3$.

Tehtäväsarja III

Tutustu kurssimateriaalin lukuun 16, joka käsittelee aliavaruuksia. Aliavaruudet ovat vektoriavaruuksia, jotka sisältyvät toiseen vektoriavaruuteen.

7. Merkitään $W = \{(3x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

   (a) Piirrä kuva joukosta W.
   (b) Oletetaan, että $\bar{w} \in W$ ja $\bar{u} \in W$. Osoita, että $\bar{w} + \bar{u} \in W$.
   (c) Oletetaan, että $\bar{w} \in W$ ja $r \in \mathbb{R}$. Osoita, että $r\bar{w} \in W$.
   (d) Osoita, että $\bar{0} \in W$.
   (e) Totea, että W on vektoriavaruuden $\mathbb{R}^2$ aliavaruus.

8. Piirrä kuva joukosta $S = \{(-2,-3) + t(4,1) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

   (a) Valitse kaksi vektoria joukosta S ja piirrä ne kuvaan. Onko vektoreiden summa joukon S vektori? Kuva riittää perusteluksi.

   (b) Valitse jokin vektori $\bar{v}$ joukosta S. Onko $3\bar{v}$ joukon S vektori? Kuva riittää perusteluksi.

   (c) Mitkä aliavaruuden määritelmän ehdoista joukko S täyttää?

9.* Oletetaan, että W on vektoriavaruuden $\mathbb{R}^4$ aliavaruus, johon kuuluvat vektorit $\bar{e}_1 = (1,0,0,0)$ ja $\bar{w} = (0,1,0,1)$. Kuuluvatko tällöin myös seuraavat vektorit aliavaruuteen W? Perustele vastauksesi aliavaruuden määritelmällä tai selitä, miksi vastausta ei voida tietää varmasti.

   (a) $\bar{v}_1 = (0,0,0,0)$ (b) $\bar{v}_2 = (1,1,0,1)$

   (c) $\bar{v}_3 = (3,4,0,4)$ (d) $\bar{v}_4 = (1,1,1,1)$

10. Tarkastellaan 2×2 -matriisien muodostamaa vektoriavaruutta $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Osoita, että joukko $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & a \\ -3b & b \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$ on avaruuden $\mathbb{R}^{2\times 2}$ aliavaruus.

Tehtäväsarja IV

Näissä tehtävissä tutustutaan polynomeihin. Reaalikertoimiset polynomit muodostavat vektoriavaruuden, joten polynomit ovat vektoreita uuden määritelmämme mukaan. Polynomeista kerrotaan esimerkissä 15.5.

11. Luettele kolme mahdollisimman erilaista vektoriavaruuden $\mathcal{P}$ alkiota.

12. Mikä on vektoriavaruuden $\mathcal{P}$ vektorin $(5/3)x^2 - 15x^3 - 1$ vastavektori? Perustele vastauksesi vastavektorin määritelmän avulla.

13. Merkitään

$$\begin{aligned} p &= 2x^4 - 7x^3 - 2x - 6, \\ q &= x^4 - 2x^3 - x \quad \text{ja} \\ r &= -3x^3 - 6. \end{aligned}$$

   Mitkä seuraavista polynomeista ovat samoja?

   (a) $2q + r$ (b) $\left(-\frac{2}{3}\right) r$ (c) $-\left(\frac{2}{3} r\right)$ (d) p (e) $-6 - 2x - 7x^3 + 2x^4$

Tehtäväsarja V

Luvuissa 17 ja 18 syvennetään tietoja jo aiemmin opiskelluista vapauden ja kannan käsitteistä yleistämällä ne avaruudesta $\mathbb{R}^n$ mihin tahansa vektoriavaruuteen.

14. Tässä tehtävässä käsitellään polynomien muodostamaa vektoriavaruutta $\mathcal{P}$. Turhia laskuja kannattaa välttää.

    (a) Pitääkö paikkansa, että $2x - 2 \in \operatorname{span}(5x^2,\ x - 2,\ 2x)$?

    (b) Pitääkö paikkansa, että $x^4 \in \operatorname{span}(5x^2,\ x - 2,\ 2x)$?

15. Merkitään

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},\ B_3 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},\ B_4 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

    Onko vektoriavaruuden $\mathbb{R}^{2\times 2}$ jono (B_1, B_2, B_3, B_4) vapaa?

16. Olkoon V vektoriavaruus. Oletetaan, että $\bar{v}, \bar{w} \in V$ ja kumpikaan vektoreista ei ole nollavektori. Osoita, vapauden määritelmän perusteella, että jono $(\bar{v}, \bar{w})$ on vapaa, jos ja vain jos vektorit $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ eivät ole yhdensuuntaisia.

Ylimääräinen tehtävä

Seuraava tehtävä on hieman haastavampi. Sillä voi korvata minkä tahansa tähdettömän tehtävän.

17. Tässä tehtävässä todistetaan lauseen 15.10 kohdat a ja c.

    (a) Oletetaan, että V on vektoriavaruus ja $\bar{v} \in V$. Osoita, että $0\bar{v} = \bar{0}$. (Voit katsoa mallia lauseen 15.10 b-kohdan todistuksesta. Selitä jokainen välivaihe itsellesi. Mitä vektoriavaruuden määritelmän ehtoja käytät?)

    (b) Oletetaan, että V on vektoriavaruus ja $\bar{v} \in V$. Osoita, että $(-1)\bar{v} = -\bar{v}$.