**Lineaarialgebra ja matriisilaskenta II**
**Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos**
**Kurssikoe 16.12.2015**
**Ratkaisuehdotus**

1. Tutkitaan vektoriavaruuden $\mathbb{R}^{2\times 3}$ aliavaruutta $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & a & a \\ b & b & b \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$ sekä kuvausta
$$L\colon \mathbb{R}^2 \to W, \quad L(a_1, a_2) = \begin{bmatrix} a_1 & a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 & a_2 \end{bmatrix}.$$
   (a) Osoita, että $L$ on lineaarikuvaus.
   (b) Määritä ydin $\operatorname{Ker} L$ ja kuva $\operatorname{Im} L$.
   (c) Ovatko vektoriavaruudet $\mathbb{R}^2$ ja $W$ isomorfiset?
   (d) Kaverisi tietää, mitä vektoriavaruuden ovat, mutta hän ei ole kuullut lineaarikuvauksista. Selitä kaverillesi, mitä c-kohdan tulos tarkoittaa ilman, että mainitset lineaarikuvauksia.

**Ratkaisuehdotus:**

(a) Oletetaan, että $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^2$ ja $r \in \mathbb{R}$. Nyt $\bar{v} = (a_1, a_2)$ ja $\bar{w} = (b_1, b_2)$ joillakin $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$.
Tarkistetaan lineaarikuvauksen kaksi ehtoa. Huomataan, että
$$\begin{aligned} L(\bar{v}) + L(\bar{w}) &= L(a_1, a_2) + L(b_1, b_2) \\ &= \begin{bmatrix} a_1 & a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 & a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 & b_1 & b_1 \\ b_2 & b_2 & b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_1 & a_1+b_1 \\ a_2+b_2 & a_2+b_2 & a_2+b_2 \end{bmatrix} \\ &= L(a_1+b_1, a_2+b_2) = L((a_1,a_2)+(b_1,b_2)) = L(\bar{v}+\bar{w}) \end{aligned}$$
ja
$$\begin{aligned} rL(\bar{v}) = rL(a_1, a_2) = r \begin{bmatrix} a_1 & a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 & a_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} ra_1 & ra_1 & ra_1 \\ ra_2 & ra_2 & ra_2 \end{bmatrix} = L(ra_1, ra_2) = L(r(a_1, a_2)) = L(r\bar{v}). \end{aligned}$$
Siten $L$ on lineaarikuvaus.

(b) Ryhdytään muokkaamaan lineaarikuvauksen $L$ ydintä ja kuvaa suoraan määritelmistä. Saadaan, että
$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} L &= \left\{ \bar{v} \in \mathbb{R}^2 \mid L(\bar{v}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 \mid L(a_1, a_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \left\{ (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{bmatrix} a_1 & a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} = \{(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 \mid a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 0\} \\ &= \{(0,0)\} \end{aligned}$$
ja
$$\begin{aligned} \operatorname{Im} L &= \{L(\bar{v}) \mid \bar{v} \in \mathbb{R}^2\} = \{L(a_1, a_2) \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} a_1 & a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 & a_2 \end{bmatrix} \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R} \right\} = W. \end{aligned}$$

(c) Ensimmäisessä tehtävässä osoitettiin, että $L$ on lineaarikuvaus. Edellisessä tehtävässä määritettiin kuvauksen $L$ ydin ja saatiin, että ytimsessä on vain nollavektori eli $\operatorname{Ker} L = \{(0,0)\}$. Siten $L$ on injektio. Edellisessä tehtävässä määritettiin myös kuvauksen $L$ kuva ja saatiin, että $\operatorname{Im} L$ on koko maaliavaruus eli $\operatorname{Im} L = W$. Näin ollen $L$ kuvaa jokaiselle maaliavaruuden alkiolle jonkin lähtöavaruuden alkion, ja on siis surjektio. Tästä seuraa, että $L$ on isomorfismi ja avaruudet $\mathbb{R}^2$ ja $W$ ovat isomorfiset.

(d) Tulos tarkoittaa, että avaruudet $W$ ja $\mathbb{R}^2$ käyttäytyvät lineaarialgebran näkökulmasta aivan samalla tavalla. Ensinnäkin avaruuksien näyttävät monella tapaa samoilta. Avaruuden $W$ alkioissa on aina kaksi reaalilukua, toinen ylärivillä ja toinen alarivillä. (Nämä reaaliluvut toki toistuvat kumpikin kolme kertaa.) Samalla tavalla avaruuden $\mathbb{R}^2$ alkiot muodostuvat kahdesta reaaliluvusta. Lisäksi avaruuden $W$ yhteenlasku ja skalaarikertolasku toimivat samalla tavalla kuin avaruuden $\mathbb{R}^2$ yhteen- ja skalaarikertolasku.

**Arviointiperusteet**

30 pistettä

(a) 8 pistettä (4 kummastakin ehdosta). Oletuksista saa kummankin ehdon kohtalla 1 pisteen.

(b) 8 pistettä (4 ytimestä ja 4 kuvasta)

(c) 6 pistettä

- Ytimestä voidaan päätellä injektiivisyys, 2 pistettä.
- Kuvasta voidaan päätellä surjektiivisuus, 2 pistettä.
- Todettu, että kuvaus on lineaarinen, 1 piste.
- Todettu, että kuvaus on edellisten nojalla isomorfismi, 1 piste.
- Todettu, että avaruudet ovat isomorfiset, 2 pistettä.

(d) 8 pistettä

- Todettu, että avaruudet ovat samanlaiset, 2 pistettä.
- Puhuttu tarkemmin siitä, miten alkiot vastaavat toisiaan, 2 pistettä.
- Mainittu, että myös laskutoimitukset toimivat samalla tavalla, 2 pistettä.

2. (a) Keksi matriisavaruuden $\mathbb{R}^{2\times 2}$ aliavaruus, johon matriisi $\begin{bmatrix} 1 & 15 \\ -10 & 42 \end{bmatrix}$ kuuluu, mutta matriisi $\begin{bmatrix} 4 & 1/2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ ei kuulu.

(b) Tässä tehtävässä käsitellään funktioista koostuvan vektoriavaruuden $\mathcal{F}$ aliavaruutta $W = \operatorname{span}(f, g, h)$, missä

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, &\quad f(x) = 3x - 4, \\ g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, &\quad g(x) = x^2 \quad \text{ja} \\ h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, &\quad h(x) = \sin(x). \end{aligned}$$

Aliavaruudella $W$ on kanta $\mathcal{B} = (f, g, h)$. Mikä on vektorin

$$k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad k(x) = 6x - 3\sin(x) - 8$$

koordinaattivektori kannan $\mathcal{B}$ suhteen?

**Ratkaisuehdotus:**

(a) Valitaan aliavaruus

$$\operatorname{span}\left(\begin{bmatrix} 1 & 15 \\ -10 & 42 \end{bmatrix}\right) = \left\{ a \begin{bmatrix} 1 & 15 \\ -10 & 42 \end{bmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}.$$

Nyt matriisi $\begin{bmatrix} 1 & 15 \\ -10 & 42 \end{bmatrix}$ on aliavaruuden alkio, sillä

$$\begin{bmatrix} 1 & 15 \\ -10 & 42 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 & 15 \\ -10 & 42 \end{bmatrix}.$$

Osoitetaan vielä, että matriisi $\begin{bmatrix} 4 & 1/2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ ei ole aliavaruuden alkio. Tehdään vastaoletus, että matriisi kuuluu aliavaruuteen. Nyt on olemassa $a \in \mathbb{R}$, jolle pätee

$$\begin{bmatrix} 4 & 1/2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1 & 15 \\ -10 & 42 \end{bmatrix}.$$

Tästä seuraa, että $4 = k$ ja $2k = 2$. Toisin sanoen $k = 4$ ja $k = 1$. Koska päädytään ristiriitaan, ei matriisi $\begin{bmatrix} 4 & 1/2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ ei ole annetun aliavaruuden alkio.

(b) Huomataan, että $k = 2f + 0g - 2h$. siten vektorin $k$ koordinaattivektori kannan $\mathcal{B}$ suhteen on $(2, 0, -3)$.

Tässä tehtävässä käsitellään funktioista koostuvan vektoriavaruuden $\mathcal{F}$ aliavaruutta $W = \operatorname{span}(f, g, h)$, missä

$$\begin{aligned} f &\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 3x - 4, \\ g &\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = x^2 \quad \text{ja} \\ h &\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = \sin(x). \end{aligned}$$

Aliavaruudella $W$ on kanta $\mathcal{B} = (f, g, h)$. Mikä on vektorin

$$k \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad k(x) = 6x - 3\sin(x) - 8$$

koordinaattivektori kannan $\mathcal{B}$ suhteen?

## Arviointiperusteet

22 pistettä

(a) 16 pistettä

- Aliavaruus oikein, 2 pistettä.
- Osoitettu aliavaruudeksi, 6 pistettä (ehtojen tarkistaminen 2+2+1 p, oletukset mukana 1 p). Jos on käytetty span-merkintää, ei todistusta tarvita.
- Osoitettu/todettu, että toinen vektoreista kuuluu joukkoon, 2 pistettä.
- Osoitettu, että toinen vektoreista ei kuulu, 4 pistettä.

(b) 8 pistettä

- Oikea vastaus, 4 pistettä
- Perustelu, 4 pistettä.

- Jos merkinnät ovat kovin sekaisin (sekoitettu pahasti funktio ja funktion arvo), perusteluista voi antaa vähemmän pisteitä.

3. (a) Oletetaan, että lineaarikuvaukselle $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ pätee $T(0,1,-1,1) = (-1,-1,0)$ ja $T(-2,2,0,1) = (-3,2,1)$. Määritä $T(-2,0,2,-1)$.
   (b) Tutkitaan avaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruutta $W = \operatorname{span}((1,1,1),(-1,2,-1))$.
      i. Määritä $\operatorname{proj}_W((1,0,0))$. (Muistin virkistys: $\operatorname{proj}_{\bar{w}}(\bar{v}) = \frac{\bar{v}\cdot\bar{w}}{\bar{w}\cdot\bar{w}}\bar{w}$.)
      ii. Projektiokuvaus $p\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $p(\bar{x}) = \operatorname{proj}_W(\bar{x})$ on lineaarinen. Määritä kuvauksen $p$ matriisi.

*Ratkaisuehdotus:*

(a) Lineaarikuvauksen määritelmän perusteella

$$\begin{aligned} T(-2,0,2,-1) &= T(-2(0,1,-1,1) + (-2,2,0,1)) = -2T(0,1,-1,1) + T(-2,2,0,1) \\ &= -2(-1,-1,0) + (-3,2,1) = (-1,4,1). \end{aligned}$$

(b) i. Ensinnäkin $(1,1,1)\cdot(-1,2,-1) = -1+2-1 = 0$, joten virittäjävektorit ovat toisaan vastaan kohtisuorassa. Nyt projektio voidaan laskea seuraavasti:

$$\begin{aligned} \operatorname{proj}_W((1,0,0)) &= \frac{(1,0,0)\cdot(1,1,1)}{(1,1,1)\cdot(1,1,1)}(1,1,1) + \frac{(1,0,0)\cdot(-1,2,-1)}{(-1,2,-1)\cdot(-1,2,-1)}(-1,2,-1) \\ &= \frac{1}{3}(1,1,1) + \frac{-1}{6}(-1,2,-1) = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

ii. Matriisia varten tarvitaan luonnollisen kannan vektorien kuvavektorit. Yksi niistä on jo laskettu edellisessä kohdassa. Lasketaan vielä muut:

$$\begin{aligned} p(0,1,0) &= \operatorname{proj}_W((0,1,0)) \\ &= \frac{(0,1,0)\cdot(1,1,1)}{(1,1,1)\cdot(1,1,1)}(1,1,1) + \frac{(0,1,0)\cdot(-1,2,-1)}{(-1,2,-1)\cdot(-1,2,-1)}(-1,2,-1) \\ &= \frac{1}{3}(1,1,1) + \frac{2}{6}(-1,2,-1) = (0,1,0) \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} p(0,0,1) &= \operatorname{proj}_W((0,1,0)) \\ &= \frac{(0,0,1)\cdot(1,1,1)}{(1,1,1)\cdot(1,1,1)}(1,1,1) + \frac{(0,0,1)\cdot(-1,2,-1)}{(-1,2,-1)\cdot(-1,2,-1)}(-1,2,-1) \\ &= \frac{1}{3}(1,1,1) + \frac{-1}{6}(-1,2,-1) = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Lineaarikuvauksen matriisi saadaan asettamalla luonnollisen kannan vektorien kuvavektorit matriisin sarakkeiksi. Siten matriisi on

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}. \end{bmatrix}$$

**Arviointiperusteet**

24 pistettä

(a) 10 pistettä

- Huomattu, että vektori on lineaarikombinaatio, 4 pistettä.
- Käytetty lineaarikuvauksen määritelmää, 6 pistettä.

(b) 14 pistettä

i. 6 pistettä
- Ortogonaalisuuden tarkistus, 2 pistettä.
- Oikea kaava, 2 pistettä.
- Laskut, 2 pistettä.

ii. 8 pistettä
- Projektioiden laskeminen, 4 pistettä.
- Kuva-alkiot asetettu matriisin sarakkeiksi, 6 pistettä.

4. (a) Tutkitaan lineaarikuvausta

$$L\colon \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2, \quad L(a+bx+cx^2) = a+b+c+(a+b+c)x+(a+b+c)x^2.$$

Kuvauksella $L$ on ominaisarvot 0 ja 3. Keksi jotkin näitä ominaisarvoja vastaavat ominaisvektorit. Perustele vastauksesi ominaisarvon määritelmän avulla.

(b) Oletetaan, että $V$ on sisätuloavaruus ja $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k \in V$. Oletetaan lisäksi, että vektori $\bar{w} \in V$ on kohtisuorassa vektoreita $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k$ vastaan. Osoita, että $\bar{w}$ on aliavaruuden $\operatorname{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$ kohtisuorassa komplementissa.

**Ratkaisuehdotus.**

(a) Huomataan, että
$$L(1-x) = 0 + 0x + 0x^2 = 0(1-x).$$
Siten $1-x$ on eräs ominaisarvoa 0 vastaava ominaisvektori.

Toisaalta
$$L(1+x+x^2) = 3 + 3x + 3x^2 = 3(1+x+x^2).$$
Siten $1+x+x^2$ on eräs ominaisarvoa 3 vastaava ominaisvektori.

(b) Oletuksen mukaan $\langle \bar{w}, \bar{v}_i \rangle = 0$ kaikilla $i \in \{1, \ldots, k\}$. On osoitettava, $\bar{w}$ on kohtisuorassa kaikkia aliavaruuden $\operatorname{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$ vektoreita vastaan. Oletetaan siis, että $\bar{a} \in \operatorname{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$. Tällöin $\bar{a} = a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + \cdots + a_k\bar{v}_k$ joillakin $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$. Sisätulon määritelmän ehtojen nojalla

$$\begin{aligned} \langle \bar{w}, \bar{a} \rangle &= \langle \bar{w}, a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + \cdots + a_k\bar{v}_k \rangle \\ &= \langle \bar{w}, a_1\bar{v}_1 \rangle + \langle \bar{w}, a_2\bar{v}_2 \rangle + \cdots + \langle \bar{w}, a_k\bar{v}_k \rangle \\ &= a_1 \langle \bar{w}, \bar{v}_1 \rangle + a_2 \langle \bar{w}, \bar{v}_2 \rangle + \cdots + a_k \langle \bar{w}, \bar{v}_k \rangle \\ &= a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + \cdots + a_k \cdot 0 = 0\,. \end{aligned}$$

Siten $\langle \bar{w}, \bar{a} \rangle = 0$, olipa $\bar{a}$ mikä tahansa aliavaruuden $\operatorname{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$ vektori. Näin ollen $\bar{w}$ on aliavaruuden $\operatorname{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$ kohtisuorassa komplementissa.

**Arviointiperusteet**

24 pistettä

(a) 12 pistettä

- Oikeat ominaisvektorit 2+2 pistettä
- Perustelut 4+4 pistettä

(b) 12 pistettä

- Oletus $\langle \bar{w}, \bar{v}_1 \rangle = 0$, 2 pistettä
- Oletus $\bar{a} \in \mathrm{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$, 2 pistettä
- Miltä $\bar{a}$ näyttää, 2 pistettä
- Laskusääntöjen käyttäminen, 4 pistettä. (Jos käytetty pistetulomerkintää, 2 p)
- Oletuksen käyttäminen $\langle \bar{w}, \bar{v}_1 \rangle = 0$, 2 pistettä