Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2015
Harjoitus 6

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 9.10.2015 klo 19.30
Korjausten viimeinen palautuspäivä: pe 24.10.2015 klo 19.30

Tehtäväsarja I

Tässä tehtäväsarjassa kerrataan lukujen 10 ja 11 asioita.

1. Olkoon $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & c & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$. Mikä luvun c pitäisi olla, jotta matriisi A ei olisi kääntyvä?

   Lisätehtävä: Kuinka monella eri tavalla osaat ratkaista tehtävän? Luettele keksimiäsi tapoja.

2. Oletetaan, että $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Tiedetään, että matriisiyhtälöllä $A\bar{x} = \bar{0}$ on ratkaisu $\bar{x} = (-3, 4, 0)$. Onko matriisi A kääntyvä?

Tehtäväsarja II

Tässä tehtäväsarjassa syvennytään ominaisarvon ja ominaisvektorin käsitteisiin, joita käsitellään luvussa 12.

3. Tässä tehtävässä selvitetään matriisin $A = \begin{bmatrix} 8 & -6 \\ 9 & -7 \end{bmatrix}$ ominaisarvot.

   (a) Oletetaan, että B on $n \times n$-neliömatriisi ja $\lambda \in \mathbb{R}$. Mikä ehto matriisin B determinantin pitää toteuttaa, jotta yhtälöllä $B\bar{x} = \bar{0}$ olisi muitakin ratkaisuja kuin $\bar{x} = \bar{0}$?

   (b) Laske matriisin $A - \lambda I$ determinantti.

   (c) Mikä luvun λ täytyy olla, jotta yhtälöllä $(A - \lambda I)\bar{x} = \bar{0}$ olisi muitakin ratkaisuja kuin $\bar{x} = \bar{0}$?

   (d) Määritä yhtälön $A\bar{x} = \lambda\bar{x}$ eli yhtälön $(A-\lambda I)\bar{x} = \bar{0}$ ratkaisut c-kohdassa löytämiesi lukujen λ tapauksissa.

   (e) Mitä voit päätellä matriisin A ominaisarvoista ja ominaisvektoreista tämän tehtävän pohjalta?

4. Tutkitaan matriisia

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}.$$

   (a) Määritä matriisin A ominaisarvot ja ominaisvektorit.

(b) Valitse yksi matriisin A ominaisarvoista. Piirrä koordinaatistoon joukko, jonka muodostavat kaikki tähän ominaisarvoon liittyvät matriisin A ominaisvektorit (tuloksena on valitsemaasi ominaisarvoon liittyvä ns. ominaisavaruus). Mitä matriisilla A kertominen tekee tämän joukon vektoreille?

5. Tutkitaan jälleen matriisia

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{bmatrix},$$

joka kuvaa opiskelijoiden luentokäyttäytymistä (ks. harjoitus 2). Tiedetään, että matriisilla A on ominaisarvo 1, jota vastaavat ominaisvektorit ovat muotoa $(3/2t, t)$, missä $t \in \mathbb{R} \setminus \{\bar{0}\}$.

Oletetaan, että kursilla on yhteensä 250 opiskelijaa. Etsi tasapainotila, eli selvitä, kuinka monta opiskelijaa pitää olla luennolla ja kuinka monta kotona, jotta tilanne ei muuttuisi seuraavana päivänä. Käytä apuna matriisin ominaisarvosta annettuja tietoja.

6.* Tutkitaan 4×4 -matriisia A, jolla on ominaisarvo λ. Osoita, että jos $\bar{v} = (0, 1, -4, 15)$ ja $\bar{w} = (4, 8, -7, 1)$ ovat ominaisarvoa λ vastaavia ominaisvektoreita, niin myös $-2\bar{v} + \bar{w} = (4, 6, 1, -29)$ on ominaisarvoa λ vastaava ominaisvektori. Nojaa perusteluissasi ominaisarvon määritelmään.

Neuvo: Väite on muotoa ”jos...niin”. Se todistetaan olettamalla väitteen alkuosa ja osoittamalla, että siitä seuraa väitteen loppuosa.

Tehtäväsarja III

Tutustu materiaalin lukuun 13, joka käsittelee vektorien pistetuloon liittyviä käsitteitä.

7. (a) Merkitään $\bar{v} = (-2, 1)$ ja $\bar{w} = (3, 4)$. Määritä pistetulo $\bar{v} \cdot \bar{w}$ ja normi $\|\bar{v}\|$.

(b) Mitkä seuraavista vektoreista ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan? Muista käyttää kohtisuoruuden määritelmää. Piirrä tilannetta havainnollistava kuva.

$$\bar{a} = (6, 4), \quad \bar{b} = (4, -5), \quad \bar{c} = (-2, 3).$$

8. Tuotteiden viivakoodit muodostuvat kahdestatoista numerosta, jotka ovat välillä 0–9. Voidaan ajatella, että viivakoodit ovat 12-ulotteisia vektoreita. Viivakoodin $\bar{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_{11}, d)$ yksitoista ensimmäistä numeroa sisältävät tuotteen tiedot. Viimeinen numero d on tarkistusnumero. Sen määrittämiseen käytetään kontrollivektoria

$$\bar{c} = (3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1).$$

Tarkistusnumero valitaan niin, että pistetulo $\bar{u} \cdot \bar{c}$ on kymmenellä jaollinen.

(a) Mikä on viivakoodin $\bar{u} = (7, 8, 9, 5, 2, 4, 9, 5, 2, 3, 4, d)$ tarkistusnumero d?

(b) Mikä on viivakoodin $\bar{w} = (4, 0, 8, 4, 3, 0, 0, 1, \blacksquare, 1, 3, 1)$ tuhraantunut merkki?

Tehtäväsarja IV

Seuraavien tehtävien avulla opiskellaan vektorin projektion käsitettä, josta kerrotaan materiaalin kappaleessa 13.2.

9. Merkitään $\bar{w} = (1, 2)$. Piirrä (ilman laskuja) kuva projektiosta $\mathrm{proj}_{\bar{w}}(\bar{v})$, jos

   (a) $\bar{v} = (3, 4)$ (b) $\bar{v} = (-1, -3)$ (c) $\bar{v} = (4, -2)$ (d) $\bar{v} = (-2, -4)$.

   Piirrä edellisiin kuviin myös erotusvektori $\bar{v} - \mathrm{proj}_{\bar{w}}(\bar{v})$.

10. Tarkista laskemalla, että piirsit projektiovektorit edellisessä tehtävässä oikein.

11.* Oletetaan, että $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^3$. Mitkä seuraavista sievennyksistä saa tehdä? Muista perustella vastauksesi. Jos sievennys on tehty väärin, voit perustella sen esimerkkivektoreiden avulla.

   (a)
   $$\frac{\bar{v} \cdot \cancel{\bar{w}}}{\bar{w} \cdot \cancel{\bar{w}}} = \frac{\bar{v}}{\bar{w}}$$

   (b)
   $$\frac{\bar{v} \cdot \bar{w}}{\cancel{\bar{w} \cdot \bar{w}}}(\cancel{\bar{w} \cdot \bar{w}}) = \bar{v} \cdot \bar{w}$$

   (c)
   $$\frac{\bar{v} \cdot \cancel{\bar{w}}}{\cancel{\bar{w}} \cdot \cancel{\bar{w}}}\cancel{\bar{w}} = \bar{v}$$

12. Olkoot $\bar{v}$, $\bar{w} \in \mathbb{R}^n$ ja $\bar{w} \neq 0$.

   (a) Päättele tehtävän 9 piirrosten avulla, mitä on $\mathrm{proj}_{\bar{w}}(\mathrm{proj}_{\bar{w}}(\bar{v}))$.

   (b) Päättele tehtävän 9 piirrosten avulla, mitä on $\mathrm{proj}_{\bar{w}}(\bar{v} - \mathrm{proj}_{\bar{w}}(\bar{v}))$.

   (c) Voit perustella havaintosi täsmällisesti, jos haluat. (Tehtävän voi merkitä tehdyksi, vaikka tekisi vain a- ja b-kohdat.)

Tehtäväsarja V

13. Tarkastellaan vektorien $\bar{v}_1 = (1, 1, 0)$, $\bar{v}_2 = (0, 1, -2)$ ja $\bar{v}_3 = (1, 2, -2)$ virittämää avaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruutta $V = \mathrm{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$.

   (a) Etsi kanta aliavaruudelle V.

   (b) Mikä on aliavaruuden V dimensio?

   (c) Onko aliavaruus V suora tai taso?

   (d) Määritä vektori, jonka koordinaatit löytämäsi kannan suhteen ovat 4 ja -1.

Tehtäväsarja VI

Seuraavat tehtävät liittyvät materiaalin lukuun 12.3, jossa opiskellaan diagonalisointia.

14. Tässä tehtävässä tutkitaan jälleen matriisia $A = \begin{bmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$, jonka ominaisarvot määritettiin tehtävässä 4. Merkitään $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ja $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.
    (a) Laske potenssi D^3. Mitä huomaat? Mitä olisi D^n?
    (b) Miten matriisi D liittyy tehtävään 4?
    (c) Etsi käänteismatriisi P^{-1} ja laske tulo $P^{-1}AP$. Mitä huomaat?
    (d) Miten matriisi P liittyy edellisiin tehtäviin?
    (e) Miten matriisien D ja P sarakkeet liittyvät toisiinsa?
    (f) Onko matriisi A diagonalisoituva?
    (g) Laske potenssi A^5 samaan tapaan kuin luentomateriaalin esimerkissä 12.14.

15. Onko matriisi $B = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ diagonalisoituva?

Tehtäväsarja VII

16. Tutustu kurssisivulla olevaan oppimistavoitematriisiin. Mieti, mitkä oppimistavoitteet olet jo saavuttanut ja mitä asioita sinun tulee vielä harjoitella. Merkintöjen tekeminen matriisiin voi olla avuksi. (Voit vaikkapa tulostaa matriisin paperille.)

    Kirjoita ratkaisupaperiin lyhyt selostus siitä, missä asioita sinun täytyy harjoitella ja miten sen aiot tehdä.

Ylimääräisiä tehtäviä

Näillä tehtävillä voi korvata mitkä tahansa tähdettömät tehtävät.

17. Oletetaan, että $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^n$ ja $\|\bar{v}\| = 2$, $\|\bar{w}\| = 3$ ja $\bar{v} \cdot \bar{w} = -1$.
    (a) Merkitään $\bar{a} = 3\bar{v} - \bar{w}$ ja $\bar{b} = \bar{v} + \bar{w}$. Määritä $\bar{a} \cdot \bar{b}$.
    (b) Määritä $\|\bar{v} + 2\bar{w}\|$.

18. Oletetaan, että C on neliömatriisi. Osoita, että 0 on matriisin C ominaisarvo, jos ja vain jos C ei ole kääntyvä.