**Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I**
**Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos**
**Syksy 2015**
**Harjoitus 5**

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 2.10.2015 klo 19.30
Korjausten viimeinen palautuspäivä: pe 16.10.2015 klo 19.30

## Tehtäväsarja I

1. Tämän tehtävän laskuissa voit käyttää apuna Matlabia.

   Matriiseja voi käyttää viestien salaamiseen. Näissä tehtävissä salaamiseen käytetään $3 \times 3$-matriisia. Ensin viesti muutetaan $3 \times n$-matriisiksi seuraavalla tavalla: Viestin kirjaimet koodataan niitä vastaaviksi järjestysnumeroksi aakkosissa ja numerot järjestetään matriisiksi ylhäältä alas ja vasemmalta oikealle. Tyhjä tila täytetään numerolla 0. Esimerkiksi viestiä "maamyyrä" vastaa matriisi

$$\begin{bmatrix} 13 & 13 & 18 \\ 1 & 25 & 28 \\ 1 & 25 & 0 \end{bmatrix}$$

   Tätä matriisia kerrotaan vasemmalta salauksessa käytettävällä matriisilla, jonka vain viestin lähettäjä ja vastaanottaja tietävät. Kertolaskun tulos lähetetään vastaanottajalle.

   (a) Tehtävänäsi on lähettää viesti "tuhoa tiedostot". Salauksessa käytetään matriisia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Miltä näyttää salattu viesti, jonka lähetät?

   (b) Saat salatun viestin

$$\begin{bmatrix} 16 & 38 & 25 & 1 & 37 & 19 \\ 11 & 20 & 16 & 0 & 16 & 19 \\ 20 & 46 & 25 & 23 & 22 & 0 \end{bmatrix}.$$

   Salauksessa on käytetty samaa matriisia kuin edellisessä tehtävässä. Miten voit matriisien teorian avulla selvittää, mitä viestissä sanotaan?

   (c) Millainen matriisin pitää olla, jotta sitä voi käyttää viestien salaamiseen?

2. Mitkä seuraavista väitteistä ovat tosia, mitkä epätosia? Muista, että tällainen väite osoitetaan epätodeksi antamalla vastaesimerkki.

   Oletetaan, että $A$, $B$ ja $C$ ovat matriiseja.

   (a) Jos $AB = O$, niin $A = O$ tai $B = O$.

   (b) Jos $AB = AC$ ja $A \neq O$, niin $B = C$.

   (c) Millaisia havaintoja teit matriisien kertolaskusta a- ja b-kohdissa? Miten matriisikertolasku eroaaa reaalilukujen kertolaskusta?

3.$^\star$ Merkitään

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Osoita, että $AB = I$. Onko matriisi $B$ matriisin $A$ käänteismatriisi?

(b) Tutkitaan yhtälöä $XA = C$, missä $X \in \mathbb{R}^{1\times 2}$. Tarkastellaan seuraavaa päättelyketjua:

$$\begin{aligned} & XA = C \\ \Leftrightarrow \quad & XAB = CB \\ \Leftrightarrow \quad & XI = CB \\ \Leftrightarrow \quad & X = CB \\ \Leftrightarrow \quad & X = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Tarkista, että $X = [-1\ 1]$ ei kuitenkaan ole yhtälön $XA = C$ ratkaisu. Mikä päättelyssä menee pieleen? (Katso tarvittaessa apua kurssisivulla olevasta yhtälönratkaisutekstistä.)

(c) Vaihda päättelyketjussa ekvivalenssinuolten tilalle tarpeen mukaan implikaationuolia niin, että päättelyketju on tosi.

4. (a) Tallenna koneellesi kurssisivulla oleva tiedosto `piirtaminen.m`.

(b) Avaa tiedosto Matlabissa ja aja se painamalla vihreää nuolta ikkunan ylälaidassa (`Run`-komento). Mitä tiedostossa oleva koodinpätkä tekee?

(c) Muuta koodia niin, että se piirtääkin vektorit $\bar{w} = (-2, 3)$ ja $A\bar{w}$. (Vektori $\bar{w}$ on tulkittava sarakevektoriksi eli $2 \times 1$ -matriisiksi.)

(d) Tutki, mitä matriisilla $A = \left[\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ kertominen tekee tason vektoreille testaamalla asiaa eri vektoreilla. Kirjoita johtopäätöksesi ratkaisupaperiin.

## Tehtäväsarja II

Tutustu kurssimateriaalin lukuun 12, jossa selviää, mitä ovat matriisin ominaisarvot ja ominaisvektorit. Tehtävissä 5–6 tutkitaan matriisia $A = \begin{bmatrix} 8 & -6 \\ 9 & -7 \end{bmatrix}$.

5. Merkitään $\bar{v}_1 = (1, 1)$ ja $\bar{v}_2 = (3, 3)$.

(a) Laske tulot $A\bar{v}_1$ ja $A\bar{v}_2$.

(b) Havainnollista vektoreita $\bar{v}_1$ ja $\bar{v}_2$ sekä tuloja $A\bar{v}_1$ ja $A\bar{v}_2$ koordinaatistossa paikkavektoreina. Selitä omin sanoin, mitä matriisilla $A$ kertominen tekee vektoreille $\bar{v}_1$ ja $\bar{v}_2$.

(c) Laske tulo $A\bar{u}$, missä $\bar{u} = (-1, 1)$. Vaikuttaako matriisilla $A$ kertominen vektoriin $\bar{u}$ samalla tavalla kuin vektoreihin $\bar{v}_1$ ja $\bar{v}_2$?

(d) Mitä voit päätellä matriisin $A$ ominaisarvoista ja -vektoreista tämän tehtävän pohjalta?

6. Merkitään $\bar{w}_1 = (2, 3)$ ja $\bar{w}_2 = (-1;\ -1{,}5)$.

(a) Laske tulot $A\bar{w}_1$ ja $A\bar{w}_2$.

(b) Havainnollista vektoreita $\bar{w}_1$ ja $\bar{w}_2$ sekä tuloja $A\bar{w}_1$ ja $A\bar{w}_2$ koordinaatistossa paikkavektoreina. Selitä omin sanoin, mitä matriisilla $A$ kertominen tekee vektoreille $\bar{w}_1$ ja $\bar{w}_2$.

(c) Laske tulo $A\bar{e}_2$, missä $\bar{e}_2 = (0, 1)$. Vaikuttaako matriisilla $A$ kertominen vektoriin $\bar{e}_2$ samalla tavalla kuin vektoreihin $\bar{w}_1$ ja $\bar{w}_2$?

(d) Mitä voit päätellä matriisin $A$ ominaisarvoista ja -vektoreista tämän tehtävän pohjalta?

**Tehtäväsarja III**

7. Lineaarialgebran kurssilla pitää ratkaista seuraavanlainen tehtävä:

   Oletetaan, että $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3 \in \mathbb{R}^n$. Oletetaan, että jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ on vapaa. Onko jono $(\bar{v}_1 + \bar{v}_2,\ \bar{v}_2 + \bar{v}_3,\ \bar{v}_3)$ vapaa?

   Ohessa on erään kurssin opiskelijan ratkaisu tehtävään. Selitä, mitä vikaa ratkaisussa on.

   Oletuksena on, että jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ on vapaa. Jos siis $a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + a_3\bar{v}_3 = \bar{0}$ joillakin $a_1$, $a_2$, $a_3 \in \mathbb{R}$, niin $a_1 = 0$, $a_2 = 0$ ja $a_3 = 0$.
   Oletetaan, että $a_1(\bar{v}_1+\bar{v}_2)+a_2(\bar{v}_2+\bar{v}_3)+a_3\bar{v}_3 = \bar{0}$ joillakin $a_1$, $a_2$, $a_3 \in \mathbb{R}$. Huomataan, että
   $$a_1(\bar{v}_1 + \bar{v}_2) + a_2(\bar{v}_2 + \bar{v}_3) + a_3\bar{v}_3 = a_1\bar{v}_1 + a_1\bar{v}_2 + a_2\bar{v}_2 + a_2\bar{v}_3 + a_3\bar{v}_3.$$
   Oletuksen mukaan $a_1 = 0$, $a_2 = 0$ ja $a_3 = 0$. Siten
   $$\begin{aligned} &a_1\bar{v}_1 + a_1\bar{v}_2 + a_2\bar{v}_2 + a_2\bar{v}_3 + a_3\bar{v}_3 \\ &= 0\bar{v}_1 + 0\bar{v}_2 + 0\bar{v}_2 + 0\bar{v}_3 + 0\bar{v}_3 = \bar{0}. \end{aligned}$$
   Siis $a_1(\bar{v}_1 + \bar{v}_2) + a_2(\bar{v}_2 + \bar{v}_3) + a_3\bar{v}_3 = \bar{0}$. Siten jono $(\bar{v}_1 + \bar{v}_2,\ \bar{v}_2 + \bar{v}_3,\ \bar{v}_3)$ on vapaa.

8.* Oletetaan, että $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3 \in \mathbb{R}^n$. Oletetaan lisäksi, että jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ on vapaa. Onko jono $(\bar{v}_1 - 2\bar{v}_3,\ 4\bar{v}_3,\ -\bar{v}_1 - \bar{v}_2)$ vapaa?

**Tehtäväsarja IV**

Jatketaan materiaalin luvun 8 opiskelua.

9. Tämä tehtävä liittyy esimerkkiin 8.4, jossa osoitetaan, että vektorit $\bar{w}_1 = (2, -1)$ ja $\bar{w}_2 = (1, 3)$ muodostavat avaruuden $\mathbb{R}^2$ kannan $\mathcal{B} = (\bar{w}_1, \bar{w}_2)$.

   (a) Määritä vektorin $\bar{u} = (10, 2)$ koordinaatit kannan $\mathcal{B}$ suhteen esimerkin 8.4 ratkaisun avulla. Piirrä näitä koordinaatteja havainnollistava kuva. Ota mallia esimerkin 8.6 kuvista.

   (b) Tiedetään, että vektorin $\bar{w}$ koordinaatit kannan $\mathcal{B}$ suhteen ovat 3 ja $-2$. Mistä vektorista on kysymys? Piirrä havainnollistava kuva.

10. (a) Tutustu dimension käsitteeseen, joka esitellään luvussa 8.2.

   (b) Mikä on aliavaruuden $\text{span}((0, 1, -4), (2, -2, 5))$ dimensio? Perustele vastauksesi huolellisesti. Piirrä lisäksi aliavaruudesta havainnekuva. (Kuvan ei tarvitse olla tarkka.)

   (c) Mikä on aliavaruuden $\text{span}((-3/4, 1, 1/2), (-3, 4, 2), (3/2, -2, -1))$ dimensio? Piirrä aliavaruudesta havainnekuva.

11.* Halutaan selvittää virittävätkö eräät vektorit $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ ja $\bar{v}_3$ avaruuden $\mathbb{R}^3$. Kun tutkitaan, onko vektori $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ vektorien $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ ja $\bar{v}_3$ lineaarikombinaatio, päädytään matriisiin
   $$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 4 & a_3 - 2a_2 \\ 0 & 1 & 0 & 2a_1 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 - a_2 - a_3 \end{array}\right].$$
   Virittävätkö vektorit avaruuden $\mathbb{R}^3$? Jos eivät, anna jokin avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektori, jota ei voi kirjoittaa vektorien $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ ja $\bar{v}_3$ lineaarikombinaationa.

**Tehtäväsarja V**

Tutustu lukuun 10.1, jossa kerrotaan, kuinka alkeisrivitoimituksia voi saada aikaiseksi matriisikertolaskulla.

12. Tarkastellaan matriiseja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

   (a) Mikä alkeisrivitoimitus matriisille on tehty kussakin tapauksessa?

   $$\text{(i) } A \to B \quad \text{(ii) } B \to A \quad \text{(iii) } C \to D \quad \text{(iv) } D \to C.$$

   (b) Päättele kussakin tapauksessa, mikä alkeismatriisi $E$ toteuttaa annetun yhtälön:

   $$\text{(i) } EA = B \quad \text{(ii) } EB = A \quad \text{(iii) } EC = D \quad \text{(iv) } ED = C.$$

13. Tutkitaan matriisia

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -2 \end{bmatrix}.$$

   Siitä voi muokata ykkösmatriisin seuraavasti:

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3+7R_2} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}R_3} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1-5R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1-R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   (a) Tutustu lauseeseen 10.7.

   (b) Päättele edellä annettujen laskujen perusteella, onko matriisi $B$ kääntyvä.

   (c) Etsi alkeismatriisit $E_1, \ldots, E_4$, joille pätee $E_4E_3E_2E_1B = I$.

   (d) Määritä edellisen kohdan avulla matriisin $B$ käänteismatriisi. Voit laskea laskut Matlabilla.

14. Oletetaan, että $A$ on neliömatriisi, jolle pätee $A^2 = O$. Osoita, että matriisi $I - A$ on kääntyvä ja että sen käänteismatriisi on $A + I$.

**Ylimääräinen tehtävä**

Seuraava tehtävä on hieman haastavampi. Sillä voi korvata minkä tahansa tähdettömän tehtävän.

15. Sanotaan, että matriisit $A$ ja $B$ *kommutoivat*, jos pätee $AB = BA$.

   Tutkitaan $2 \times 2$-matriisien joukkoa $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Osoita, että ainoat joukon $\mathbb{R}^{2\times 2}$ matriisit, jotka kommutoivat kaikkien muiden $2 \times 2$-matriisien kanssa, ovat skalaarimatriisit

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}, \quad \text{missä } a \in \mathbb{R}.$$

   *Vihje todistuksen toista suuntaa varten:* Oleta, että matriisi $A$ kommutoi kaikkien joukon $\mathbb{R}^{2\times 2}$ matriisien kanssa. Tällöin $A$:n täytyy kommutoida muun muassa matriisien

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   kanssa. Mitä voit tällöin päätellä matriisista $A$?