Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2015
Harjoitus 4

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 25.9.2015 klo 19.30
Korjausten viimeinen palautuspäivä: pe 9.10.2015 klo 19.30

Tehtäväsarja I

Tässä tehtäväsarjassa jatketaan vapautta käsittelevään lukuun 7 tutustumista.

1. Merkitään $\bar{v}_1 = (1,1,1)$, $\bar{v}_2 = (0,2,0)$ ja $\bar{v}_3 = (1,-1,1)$. Halutaan osoittaa, että jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ on sidottu.
   (a) Millaista on tutkittava? Mitä sen ratkaisuista halutaan osoittaa?
   (b) Näytä määritelmän 7.1 avulla, että vektorijono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ on sidottu.
   (c) Voitko kirjoittaa jokin vektoreista toisten lineaarikombinaationa? Tee niin, jos mahdollista.

2.* Merkitään $\bar{w}_1 = (1,1,1)$, $\bar{w}_2 = (1,2,3)$ ja $\bar{w}_3 = (1,-1,2)$. Halutaan tutkia, onko jono $(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3)$ vapaa.
   (a) Millaista yhtälöä on tutkittava? Mitä yhtälön ratkaisuista halutaan osoittaa?
   (b) Millainen yhtälöryhmä yhtälöstä saadaan?
   (c) Onko jono vapaa? (Perustele vastauksesi huolellisesti. Voit halutessasi käyttää yhtälönratkaisussa apuna Matlabia.)

3. Erään vektorijonon vapautta tutkittaessa päädyttiin redusoituun porrasmatriisiin, joka näkyy alla. Mihin avaruuteen $\mathbb{R}^n$ tutkittavat vektorit kuuluvat? Kuinka monta vektoria tutkittavassa vektorijonossa on? Onko vektorijono vapaa?

(a) $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$ (b) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

4.* Oletetaan, että $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$. Onko jono $(\bar{v}, 2\bar{v}, 3\bar{v})$ vapaa vai sidottu? Perustele väitteesi vapauden määritelmän avulla.

Tehtäväsarja II

5. (a) Tutustu lauseeseen 10.1.

(b) Matriisilla

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

on kääteismatriisi

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -3 & 5 \\ 2 & 2 & -3 \\ -7 & -6 & 10 \end{bmatrix}.$$

Merkitään $\bar{b} = (1, 2, 3)$. Ratkaise yhtälöryhmä $B\bar{x} = \bar{b}$ käyttäen hyväksi käänteismatriisia.

6. Matriisilla

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

on käänteismatriisi

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -3 & 5 \\ 2 & 2 & -3 \\ -7 & -6 & 10 \end{bmatrix}.$$

Ratkaise käänteismatriisin A^{-1} avulla yhtälöryhmät

$$\begin{cases} 2x_1 & & - & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & & & = & 3 \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} 2x_1 & & - & x_3 & = & -7 \\ x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & & & = & 2. \end{cases}$$

Tehtäväsarja III

Tutustu kurssimateriaalin lukuun 11, joka käsittelee determinanttia.

7. Laske $\det(A)$, jos

(a) $A = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 0 \\ -3 & 7 & 2 \end{bmatrix}$.

8. Mitkä edellisen tehtävän matriiseista ovat kääntyviä? Käytä hyväksesi determinanttia.

9. Oletetaan, että $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ja $\bar{b} \in \mathbb{R}^n$. Tiedetään, että matriisin A determinantti on -7. Montako ratkaisua on yhtälöllä $A\bar{x} = \bar{b}$?

Tehtäväsarja IV

10. (a) Matlabissa käänteismatriisi määritetään komennolla `inv()`. Määritä Matlabin avulla matriisin

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -4 \\ 5 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

käänteismatriisi. Tarkista lopuksi, että saamasi matriisi on todellakin C:n käänteismatriisi.

(b) Määritä matriisin

$$D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

käänteismatriisi. Tarkista lopuksi, onko saamasi matriisi D:n käänteismatriisi. Mikä menee pieleen? Onko matriisilla D lainkaan käänteismatriisia?

Tehtäväsarja V

11.* Erään yhtälöryhmän matriisia on muokattu alkeisrivitoimituksilla päätyen alla olevaan matriisiin. Päättele suoraan matriisin perusteella, kuinka monta ratkaisua yhtälöryhmällä on. Tässä tehtävässä ei siis ole tarkoitus ratkaista yhtälöryhmää tai edes muokata matriisia.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 81 & 100 & -3/7 & 5 & \sqrt{3} \\ 0 & -5 & b & 4 & -55 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \quad a, b \in \mathbb{R}$$

12. Tarkastellaan lineaarista yhtälöryhmää

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + ax_3 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = b \end{cases}$$

Määritä ne reaaliluvut a ja b, joilla yhtälöryhmällä

(a) on tasan yksi ratkaisu;

(b) ei ole yhtään ratkaisua;

(c) on äärettömän monta ratkaisua.

Tehtäväsarja VI

Ryhdy tutustumaan materiaalin lukuun 8, jossa käsitellään kantoja.

Tehtävissä 13–15 tutkitaan vektoreita $\bar{v}_1 = (0, 2, -1)$, $\bar{v}_2 = (1, 2, 0)$ ja $\bar{v}_3 = (1, 0, 2)$.

13. (a) Oletetaan, että $\bar{a} \in \mathbb{R}^3$. Osoita, että $\bar{a} \in \operatorname{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$.

(b) Päättele edellisen kohdan avulla, että vektorit $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ ja $\bar{v}_3$ virittävät avaruuden $\mathbb{R}^3$.

(c) Eräs vektori $\bar{u}$ esitettiin vektorien $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ ja $\bar{v}_3$ lineaarikombinaationa. Kertoimiksi saatiin 2, -7 ja 1. Mikä vektori oli kyseessä?

14. (a) Osoita, että vektorit $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ ja $\bar{v}_3$ ovat lineaarisesti riippumattomat toisistaan. Hyödynnä tehtävän 13 matriisia ja vältä turhia laskuja.

(b) Mitä voit päätellä vektorijonosta $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ a-kohdan ja tehtävän 13 nojalla?

15. (a) Esitä vektori $\bar{w} = (10, 10, 10)$ vektorien $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ ja $\bar{v}_3$ lineaarikombinaationa. Hyödynnä tehtävää 13 ja vältä turhia laskuja.

(b) Kuinka monella erilaisella tavalla a-kohdan vektori $\bar{w} = (10, 10, 10)$ voidaan esittää vektorien $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ ja $\bar{v}_3$ lineaarikombinaationa? Tässäkin voit selviytyä ilman laskuja.

Tehtäväsarja VII

16. Seuraavassa on lueteltu kurssilla tähän mennessä esiintyneitä keskeisiä käsitteitä.

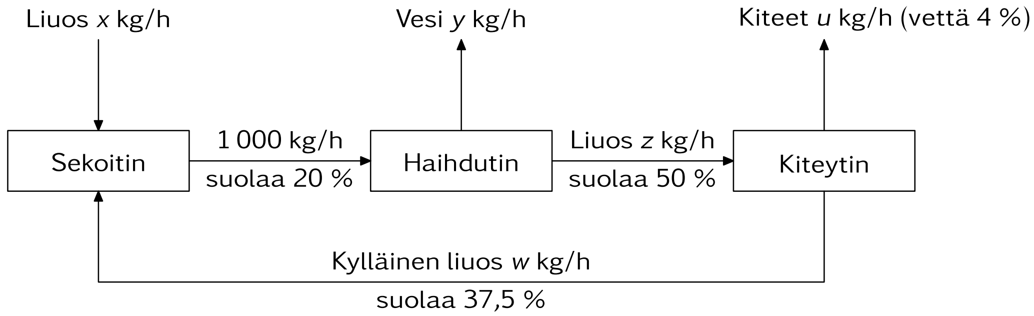
    aliavaruus, käänteismatriisi, lineaarikombinaatio, lineaarinen yhtälöryhmä, matriisi, matriisikertolasku, suora, taso, vektori, virittäminen

    Selitä, miten käsitteet liittyvät ja linkittyvät toisiinsa. Voit tehdän tämän piirtämällä esimerkiksi käsitekartan, mutta myös muut havainnollistamistavat käyvät.

Ylimääräisiä tehtäviä

Seuraavat tehtävät on hieman haastavampia. Niillä voi korvata minkä tahansa tähdettömän tehtävän.

17. Prosessissa erotetaan suolayhdistettä kiteyttämällä. Haihduttimeen syötetään 20-prosenttista suolaliuosta 1000 kg/h. Haihduttimessa suolaliuos konsentroidaan 50-prosenttiseksi suolaliuokseksi, joka syötetään kiteyttimeen. Kiteyttimessä liuos jäähtyy ja muodostuu suolakiteitä, jotka sisältävät 4 % vettä. Kiteet erotetaan ja jäljelle jäävä liuos on kylläinen suolan suhteen sisältäen suolaa 37,5 %. Tämä liuos palautetaan sekoittimeen, jossa sen joukkoon lisätään uutta suolaliuosta.



    (a) Muodosta kolme yhtälöä yllä olevassa kaaviossa esiintyvien määrien x, y, z, u ja w välille käyttäen hyväksi tietoa, ettei ainetta häviä tai synny lisää missään prosessin vaiheessa. Muodosta lisäksi kaksi yhtälöä tarkastelemalla suolan määrää prosessin eri vaiheissa.

    (b) Ratkaise saamasi viiden yhtälön lineaarinen yhtälöryhmä Matlabilla tai käsin Gaussin-Jordanin eliminointimenetelmällä.

18. Olkoon $m \in \{1, 2, \ldots\}$. Oletetaan, että matriisi $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ on kääntyvä. Oletetaan myös, että avaruuden $\mathbb{R}^m$ jono $(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$ on vapaa. Osoita, että jono $(A\bar{v}_1, \ldots, A\bar{v}_k)$ on vapaa.