KOMPLEKSIANALYYSI I KURSSI
SYKSY 2015

RITVA HURRI-SYRJÄNEN

2. Kompleksitason topologiaa

Kompleksianalyysi on kompleksiarvoisten kompleksimuuttujien funktioiden teoriaa. Tällä kurssilla käsittelemme vain yhden kompleksimuuttujan kompleksiarvoisia funktioita. Siis meillä $f : A \to \mathbb{C}$, missä A on kompleksitason osajoukko, ellemme erityisesti toisin mainitse.

Tällaisten funktioiden käyttäytymisen tutkimiseen voidaan käyttää ainakin kolmea eri lähestymistapaa.

(1) Yksi tapa perustuu kompleksiseen derivoitumiseen ja sisältää Cauchyn-Riemannin yhtälöt. Tämä tapa yleensä liitetään Riemanniin.
(2) Toinen tapa perustuu integroimiseen ja silloin peruslause on Cauchyn integraaliteoreema. Tämä tapa yleensä liitetään Cauchy'iin.
(3) Kolmas tapa perustuu potenssisarjojen käyttöön ja se yleensä liitetään Weierstrassiin.

Ensin kuitenkin kompleksitason topologiaa.

2.1. **Avoimista ja suljetuista joukoista.**

Määritellään kuvaus

$$\mathrm{d} : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to [0, \infty)$$

asettamalla

$$\mathrm{d}(z_1, z_2) := |z_1 - z_2| \,. \tag{2.1}$$

Tämä kuvaus on metriikka, sillä kaikilla $z, w, u \in \mathbb{C}$ pätee

(1) $\mathrm{d}(z,w) \le \mathrm{d}(z,u) + \mathrm{d}(u,w)$
(2) $\mathrm{d}(z,w) = \mathrm{d}(w,z)$
(3) $\mathrm{d}(z,w) = 0$, jos ja vain jos $z = w$.

Date: 11092015.

Luku $\mathrm{d}(z_1, z_2)$ on pisteiden $z_1 \in \mathbb{C}$ ja $z_2 \in \mathbb{C}$ välinen etäisyys.

Olkoot $a \in \mathbb{C}$ ja $r \in \mathbb{R}_+$. Joukko

$$\mathbb{D}(a, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}$$

on kiekko, jonka keskipiste on a ja säde on r . Kompleksitason epätyhjä osajoukko A on avoin, jos jokaisella $a \in A$ on olemassa positiivinen reaaliluku r_a siten, että $\mathbb{D}(a, r_a) \subset A$. Sovimme, että tyhjä joukko on avoin. Erityisesti jokainen kiekko $\mathbb{D}(a, r)$ on avoin.

Joukko $B \subset \mathbb{C}$ on suljettu kompleksitasossa, jos sen komplementti $\mathbb{C} \setminus B$ on avoin. Esimerkiksi, joukko

$$\overline{\mathbb{D}}(a, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| \leq r\}$$

on suljettu, ja se on a-keskinen, r-säteinen suljettu kiekko. Lisäksi, koko kompleksitaso $\mathbb{C}$ ja tyhjä joukko ovat sekä suljettuja että avoimia kompleksitasossa.

2.1. **Esimerkki.** (1) $\mathbb{D}(z_0, r)$ on avoin.
(2) $\mathbb{D}(z_0, r) \setminus \{0\}$ on avoin.
(3) $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}(z_0, r)$ on avoin.
(4) $\mathbb{H}^+ = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ on avoin.
(5) $\cup_{n \in \mathbb{N}} \{z \in \mathbb{C} : |z - n| < 1/3\}$ on avoin.

2.2. **Esimerkki.** (1) $\overline{\mathbb{D}}(z_0, r)$ on suljettu kompleksitasossa $\mathbb{C}$.
(2) Kiekon kehä $\partial \mathbb{D}(z_0, r)$ on suljettu kompleksitasossa $\mathbb{C}$.
(3) $\mathbb{R}$ on suljettu kompleksitasossa $\mathbb{C}$.
(4) $\overline{\mathbb{H}}^+ = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$ on suljettu kompleksitasossa $\mathbb{C}$.
(5] Olkoon $n \geq 1$. Leikkaus $\cap_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{D}(0, 1/n) = \{0\}$ on suljettu.

2.3. **Kasautumispiste.** Luku z_0 on kompleksitason joukon S kasautumispiste, jos jokaisella $\epsilon > 0$ on olemassa piste $p_\epsilon \neq z_0$ siten, että $p_\epsilon \in S \cap \mathbb{D}(z_0, \epsilon)$.

2.4. *Huomautus.* Siis luku z_0 on kompleksitason joukon S kasautumispiste, jos jokaisessa kiekossa $\mathbb{D}(z_0, \epsilon)$, $\epsilon > 0$ on joukon S jokin piste, joka ei ole z_0. Huomaa, että luku z_0 ei itse ole välttämättä joukon S piste. Oleellista on, että joukon S kasautumispisteellä z_0 on joukon S pisteitä mielivaltaisen lähellä sitä. Itse asiassa jokaisessa kiekossa $\mathbb{D}(z_0, \epsilon)$ on oltava äärettömän monta joukon S pistettä.

2.5. **Lause.** *Kompleksitason joukko B on suljettu, jos ja vain jos se sisältää kaikki kasautumispisteensä.*

2.6. *Huomautus.* Suljettujen joukkojen mielivaltainen leikkaus on suljettu.

2.7. **Määritelmä.** (1) Kompleksitason joukon A sulkeuma on

$$\overline{A} = \cap\{F : A \subset F \text{ ja } F \text{ on suljettu}\}.$$

(2) Piste z_0 on kompleksitason joukon A sisäpiste, jos on olemassa luku $\delta > 0$ siten, että $\mathbb{D}(z_0, \delta) \subset A$. Sisäpisteiden joukon merkintä on $\operatorname{int} A$.
(3) Kompleksitason joukon A reuna on $\partial A = \bar{A} \setminus \operatorname{int} A$.
(4) Joukko $U \subset \mathbb{C}$ on pisteen $z_0 \in C$ ympäristö (eli ystö), jos $z_0 \in U$ ja U on kompleksitason avoin osajoukko.

2.8. **Esimerkki.** (1) $\partial\mathbb{H}^+ = \mathbb{R}$.
(2) $\partial\mathbb{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_o| = r\}$ on kiekon $\mathbb{D}(z_0, r)$ kehä.
(3) $\partial(\mathbb{D}(z_0, r)\setminus\{0\}) = \partial\mathbb{D}(z_0, r) \cup \{z_0\}$.
(4) $\overline{A}$ on suljettu.
(5) $\operatorname{int} A$ on avoin. Joskus merkitään $\operatorname{int} A = A^0$.

2.9. *Huomautus.* Pisteet, jotka eivät ole joukon S kasautumispisteitä, ovat joukon S erillisiä pisteitä.
Olkoon $S = \{z \in \mathbb{C} | z = 0 \text{ tai } z = 1/n \text{ positiivisella kokonaisluvulla } n\}$. Joukon S ainoa kasautumispiste on 0 ja $0 \in S$, siis S on suljettu. Kaikki muut joukon S pisteet ovat erillisiä pisteitä. Erillisellä pisteellä z_0 on avoin ystö $\mathbb{D}(z_0, \epsilon)$, missä ei ole muita joukon S pisteitä: Valitaan nyt $\epsilon = 1/n - 1/(n+1) = 1/n(n+1)$. Silloin $\mathbb{D}(1/n, 1/n(n+1))$ ei sisällä muita joukon S pisteitä kuin $1/n$.

2.10. *Huomautus.* (1) Avoimen joukon jokainen piste on sen kasautumispiste.
(2) Piste $z \in \overline{A}$, jos ja vain jos z on joukon A erillinen piste tai joukon A kasautumispiste.

2.2. Lukujonon raja-arvosta.

2.11. **Määritelmä.** Olkoon $(z_n) = (z_n)_{n=1}^{\infty}$ jono kompleksilukuja. Luku z on jonon (z_n) raja-arvo, jos jokaisella $\epsilon > 0$ on olemassa luku $N(\epsilon)$ siten, että kun $n > N(\epsilon)$, niin $|z - z_n| < \epsilon$.

Jos raja-arvo on olemassa, niin se on yksikäsitteinen. Merkitsemme $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ ja lyhyesti $\lim z_n = z$ ja käytämme myös merkintää $z_n \to z$, kun $n \to \infty$.

2.12. **Lause.** *Olkoon (z_n) jono kompleksilukuja. Silloin*

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z,$$

jos ja vain jos

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{Re}(z_n) = \operatorname{Re}(z) \text{ ja } \lim_{n\to\infty} \operatorname{Im}(z_n) = \operatorname{Im}(z).$$

2.13. **Esimerkki.** Määrää $\lim_{n\to\infty} z_n$, kun

$$z_n = 1 + \frac{1}{n} + i\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Ratkaisu:

$$z_n \to 1 + i\,,$$

kun $n \to \infty$.

2.14. **Esimerkki.** Lukujonolla (z_n), missä

$$z_n = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n,$$

ei ole raja-arvoa, kun $n \to \infty$. Nimittäin,

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n = \begin{cases} 1\,, & \text{jos } n = 0 \mod 4\,, \\ i\,, & \text{jos } n = 1 \mod 4\,, \\ -1\,, & \text{jos } n = 2 \mod 4\,, \\ -i\,, & \text{jos } n = 3 \mod 4\,. \end{cases}$$

2.15. **Lause.** *Kompleksitaso* $\mathbb{C}$ *varustettuna metriikalla (2.1) on täydellinen metrinen avaruus.*

Todistus. Olkoon $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ Cauchy-jono kompleksitasossa $\mathbb{C}$. Siis kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ siten, että

$$|z_n - z_m| < \epsilon\,.$$

kunhan $n, m \geq n_\epsilon$. Jos $z_n = x_n + iy_n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, missä $x_n \in \mathbb{R}$ ja $y_n \in \mathbb{R}$, niin

$$|z_n - z_m| = |x_n + iy_n - x_m - iy_m| = |x_n - x_m + i(y_n - y_m)|\,.$$

Siis

$$|z_n - z_m|^2 = |x_n - x_m|^2 + |y_n - y_m|^2\,.$$

Näin ollen (x_n) ja (y_n) ovat reaalisia Cauchy-jonoja ja siten ne suppenevat reaalilukujen joukossa $\mathbb{R}$. Siis on olemassa $x \in \mathbb{R}$ ja $y \in \mathbb{R}$ siten, että

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n \text{ ja } y = \lim_{n\to\infty} y_n\,.$$

Siis

$$\lim_{n\to\infty} z_n = x + iy$$

eli kompleksilukujono (z_n) suppenee kohti kompleksilukua $x+iy$, missä $x \in \mathbb{R}$ ja $y \in \mathbb{R}$, kompleksitason metriikan suhteen. Siis kompleksitaso on täydellinen metriikan (2.1) suhteen. □

2.16. **Lause.** *Olkoot* (z_n) *ja* (w_n) *kompleksilukujen muodostamia lukujonoja ja olkoon* $\lambda \in \mathbb{C}$. *Olkoot* $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$ *ja* $\lim_{n\to\infty} w_n = w_0$. *Silloin*

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} |z_n| = |z_0|\,,\\
&\lim_{n\to\infty} \overline{z_n} = \overline{z_0}\,,\\
&\lim_{n\to\infty} (\lambda z_n) = \lambda z_0\,,\\
&\lim_{n\to\infty} (z_n + w_n) = z_0 + w_0\,,\\
&\lim_{n\to\infty} (z_n w_n) = z_0 w_0\,.
\end{aligned}$$

Jos lisäksi $w_0 \neq 0$, *niin*

$$\lim_{n\to\infty} (z_n/w_n) = z_0/w_0\,.$$

2.17. *Huomautus.* Viimeisessä kohdassa $w_0 \neq 0$, joten silloin vain äärellisen monella n voi olla $w_n = 0$. Jätetään nämä luvut w_n pois, kun muodostetaan osamäärä (z_n/w_n).

2.18. **Esimerkki.** Olkoon $u_n = i^n/n$, $n = 1, 2, \cdots$. Onko raja-arvo $\lim_{n\to\infty} u_n$ olemassa? Jos raja-arvo on olemassa, niin määrää se. Ratkaisu: Lukujono $i\,, -1/2\,, -i/3\,, 1/4\,, i/5\,, \cdots$.
Tällöin $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. Nimittäin: Olkoon $\epsilon > 0$ annettu. Silloin

$$\left|\frac{i^n}{n} - 0\right| = \frac{|i^n|}{n} = \frac{|i|^n}{n} = \frac{1}{n} < \epsilon\,,$$

kunhan luku $n > 1/\epsilon$.

2.3. **Funktion raja-arvosta.**

2.19. Olkoon A kompleksitason osajoukko. Funktiolle $f : A \to \mathbb{C}$ määritellään reaaliosa $\operatorname{Re} f : A \to \mathbb{R}$ ja imaginaariosa $\operatorname{Im} f : A \to \mathbb{R}$ asettamalla

$$(\operatorname{Re} f)(z) = \operatorname{Re}(f(z)) \text{ ja } (\operatorname{Im} f)(z) = \operatorname{Im}(f(z))\,, z \in A\,.$$

2.20. **Määritelmä.** Olkoot A kompleksitason osajoukko, z_0 joukon A kasautumispiste ja $f : A \to \mathbb{C}$ kuvaus. Silloin funktiolla f on olemassa raja-arvo w pisteessä z_0 joukon A suhteen, jos jokaisella annetulla $\epsilon > 0$ on olemassa $\delta_\epsilon > 0$ siten, että

$$\forall z \in A\,, 0 < |z - z_0| < \delta_\epsilon \text{ pätee } |f(z) - w| < \epsilon\,. \tag{2.2}$$

Merkitsemme $w = \lim_{z\to z_0, z\in A} f(z)$ tai $w = \lim_{z\to z_0} f(z)$.

2.21. **Lause.** *Jos* z_0 *on joukon* A *kasautumispiste ja raja-arvo* $w = \lim_{z\to z_0, z\in A} f(z)$ *on olemassa, niin raja-arvo on yksikäsitteinen.*

2.22. *Huomautus.* Luku z_0 ei ole välttämättä joukon A piste, joten $f(z_0)$ ei ole välttämättä määritelty. Jos taas $z_0 \in A$, niin voi olla, että $f(z_0) \neq w$.

Esimerkki 1: Tyypillinen tilanne on, että A on avoin ja $z_0 \in \overline{A}$. funktio $f(z) = \frac{1}{z^2-z} + \frac{1}{z}$ ei ole määritelty origossa, $f : \mathbb{C}\setminus\{0,1\} \to \mathbb{C}$.

$$\lim_{z\to 0\,, z\neq 0} \left(\frac{1}{z^2 - z} + \frac{1}{z} \right) = -1\,,$$

sillä

$$\frac{1}{z(z-1)} + \frac{1}{z} = \frac{1 + (z-1)}{z(z-1)} = \frac{1}{z-1} \to -1\,,$$

kun $z \to 0$.

Esimerkki 2:

$$f(z) = \begin{cases} 0\,, z \neq 0\,, \\ 1\,, z = 0\,. \end{cases}$$

Siis $\lim_{z\to 0} f(z) = 0 \neq f(0)$.

Esimerkki 3:

$$g(z) = \begin{cases} z^2\,, z \neq i\,, \\ 0\,, z = i\,. \end{cases}$$

Siis $\lim_{z\to i} g(z) = -1 \neq g(i)$.

2.23. **Esimerkki.** Onko seuraava raja-arvo olemassa

$$\lim_{z\to 1} \frac{1-\bar{z}}{1-z}?$$

Ratkaisu: Ei ole. Nimittäin, kun $z = 1 - x$, missä $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$,

$$\lim_{z\to 1} \frac{1-\bar{z}}{1-z} = 1.$$

Toisaalta, kun $z = 1 + iy$, missä $y \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$,

$$\lim_{z\to 1} \frac{1-\bar{z}}{1-z} = -1.$$

2.24. **Esimerkki.** Olkoon $f(z) = \frac{z}{|z|}$. Funktiolla f ei ole raja-arvoa origossa, nimittäin, kun $x \in \mathbb{R}$ ja $y \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x\to 0+} \frac{x}{|x|} = \lim_{x\to 0+} \frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0-} \frac{x}{|x|} = \lim_{x\to 0-} \frac{x}{-x} = -1$$

$$\lim_{y\to 0+} \frac{iy}{|iy|} = \lim_{y\to 0+} \frac{iy}{y} = i\,.$$

2.25. *Huomautus.* Oleellista on, että z_0 on joukon A kasautumispiste. Muutoin olisi tilanne, että on olemassa $\delta > 0$ siten, että punkteerattu avoin kiekko $\{z \in \mathbb{C} | 0 < |z - z_0| < \delta\}$ ei sisällä joukon A pisteitä.

2.4. **Funktion jatkuvuudesta.**

2.26. **Määritelmä.** Olkoon A kompleksitason osajoukko. Olkoon $z_0 \in A$. Funktio $f : A \to \mathbb{C}$ on jatkuva pisteessä $z_0 \in A$, jos jokaisella annetulla $\epsilon > 0$ on olemassa $\delta_\epsilon > 0$ siten, että

$$|f(z) - f(z_0)| < \epsilon, \text{ kunhan } z \in A \text{ ja } |z - z_0| < \delta_\epsilon\,.$$

Funktio f on jatkuva joukossa A, jos f on jatkuva jokaisessa joukon A pisteessä.

2.27. **Lause.** *Olkoon A kompleksitason osajoukko ja olkoon $z_0 \in A$. Funktio $f : A \to \mathbb{C}$ on jatkuva pisteessä $z_0 \in A$, jos ja vain jos funktion f reaaliosa* $\operatorname{Re} f$ *ja imaginaariosa* $\operatorname{Im} f$ *ovat jatkuvia pisteessä z_0.*

2.28. *Huomautus.* Jos piste z_0 on joukon A kasautumispiste, niin f on jatkuva pisteessä z_0, jos ja vain jos

$$\exists \lim_{z\to z_0\,, z\in A} f(z) \text{ ja } \lim_{z\to z_0\,, z\in A} f(z) = f(z_0)\,.$$

Jos z_0 on joukon A erillinen piste, niin on olemassa ystö $\mathbb{D}(z_0, \delta)$, jossa ei ole muita joukon A pisteitä kuin z_0, joten

$$\forall z \in A\,, |z - z_0| < \delta \text{ implikoi } z = z_0\,,$$

mistä seuraa $|f(z) - f(z_0)| = 0$. Siis kompleksifunktio on aina jatkuva erillisessä pisteessä tämän määritelmän nojalla.

2.29. *Huomautus.* Olkoon $f : A \to \mathbb{C}$. Funktio f voi olla jatkuva pisteessä a tai f voi olla epäjatkuva pisteessä a vain jos $a \in A$. Siis, jos esimerkiksi $f(z) = 1/z$, niin ei käytetä termiä 'epäjatkuva origossa', koska tätä funktiota f ei edes ole määritelty origossa.

2.30. **Lause.** *Olkoon A kompleksitason osajoukko. Seuraavat väitteet ovat yhtäpitävät funktiolle $f : A \to \mathbb{C}$.*

(1) *Funktio* f *on jatkuva pisteessä* $a \in A$.
(2) *Jokaisella avoimella kompleksitason osajoukolla* V, *jolle* $f(a) \in V$, *on olemassa kompleksitason avoin osajoukko* U *siten, että* $a \in U$ *ja* $A \cap U \subset f^{-1}(V)$.
(3) *Joukon* A *jokaiselle jonolle* (z_n), *jolle* $z_n \to a$, *kun* $n \to \infty$, *pätee*

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(a) .$$

2.31. *Huomautus.* Topologin määritelmä jatkuvuudelle: kompleksifunktio $f : A \to \mathbb{C}$ on jatkuva, jos ja vain jos jokaiselle avoimelle joukolle U alkukuva $f^{-1}(U)$ on avoin joukossa A. (Erityisen hyödyllinen, kun A on avoin.)

2.32. **Esimerkki.** Olkoon $f(z) = \frac{z}{\bar{z}}$, kun $z \neq 0$ ja $f(0) = 1$. Funktio f ei ole jatkuva origossa: jos valitaan $z_{2n} = 1/n$ ja $z_{2n+1} = i/n$, niin $z_n \to 0$, kun $n \to \infty$, mutta jono $(f(z_n))_{n=1}^{\infty}$ ei suppene, sillä $f(z_{2n}) = 1$ ja $f(z_{2n+1}) = -1$. Siis f ei voi olla jatkuva origossa.

2.33. **Lause.** *Olkoot funktiot* $f : A \to \mathbb{C}$ *ja* $g : A \to \mathbb{C}$ *jatkuvia pisteessä* $a \in A$. *Silloin*
(1) *Summafunktio* $f + g$ *on jatkuva pisteessä* a .
(2) *Tulofunktio* fg *on jatkuva pisteessä* a .
(3) *Jos* $g(a) \neq 0$, *niin osamääräfunktio* $\frac{f}{g}$ *on määritelty ja jatkuva jossakin pisteen* a *ympäristössä.*

2.34. **Lause.** *Olkoot* $A \subset \mathbb{C}$ *ja* $B \subset \mathbb{C}$. *Olkoot* $f : A \to \mathbb{C}$ *ja* $g : B \to \mathbb{C}$ *ja* $f(A) \subset B$. *Jos funktio* f *on jatkuva pisteessä* $a \in A$ *ja funktio* g *on jatkuva pisteessä* $f(a) \in B$, *niin silloin yhdistetty funktio* $g \circ f$ *on jatkuva pisteessä* a .

2.35. **Korollaari.** (1) *Kompleksiset polynomit* $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n ,$$

$a_0 , a_1 , \cdots , a_{n-1} , a_n \in \mathbb{C}$, *ovat jatkuvia koko kompleksitasossa* .
(2) *Rationaalifunktiot*

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} ,$$

missä P *ja* Q *ovat kompleksisia polynomeja, ovat jatkuvia kaikissa niissä kompleksitason pisteissä* z, *joissa* $Q(z) \neq 0$.

VIITTEET

[Väisälä] Jussi Väisälä, *Topologia I.* Limes ry.