KOMPLEKSIANALYYSI I KURSSI
SYKSY 2015

RITVA HURRI-SYRJÄNEN

1. Kompleksiluvuista

Kaksiulotteinen reaalinen vektoriavaruus $\mathbb{R}^2$ koostuu lukupareista (x_1, x_2), missä x_1 ja x_2 ovat reaalilukuja, eli

$$\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2)|x_1\,, x_2 \in \mathbb{R}\}\,,$$

missä $\mathbb{R}$ on reaalilukujen joukko. Siellä meillä on kaikilla tason lukupareilla (x_1, x_2) ja (u_1, u_2) määritelty luonnollinen vektorisumma eli yhteenlasku

$$(x_1, x_2) + (u_1, u_2) \,:= (x_1 + u_1, x_2 + u_2)$$

ja reaalisella skalaarilla $\lambda \in \mathbb{R}$ kertominen

$$\lambda(x_1, x_2) \,:= (\lambda x_1, \lambda x_2)\,.$$

Muistutus: $(\mathbb{R}^2, +)$ on Abelin ryhmä:

$(A1)$ $\forall a \in \mathbb{R}^2\,, b \in \mathbb{R}^2$ pätee $a + b \in \mathbb{R}^2$

$(A2)$ $\forall a \in \mathbb{R}^2\,, b \in \mathbb{R}^2\,, c \in \mathbb{R}^2$ pätee $(a + b) + c = a + (b + c)$

$(A3)$ $\exists_1\ 0 \in \mathbb{R}^2\,, 0 = (0, 0)\,,$ siten, että $\forall a \in \mathbb{R}^2$ pätee $a + 0 = a = 0 + a$
eli $(a_1, a_2) + (0, 0) = (a_1, a_2) = (0, 0) + (a_1, a_2)\,,$ kaikilla $a = (a_1, a_2)$

$(A4)$ $\forall a \in \mathbb{R}^2\,, a = (a_1, a_2)\,, \exists_1\ -a \in \mathbb{R}^2\,, -(a_1, a_2) = (-a_1, -a_2)$
siten, että $\forall a \in \mathbb{R}^2$ pätee $a + (-a) = (-a) + a = 0$

$(A5)$ $\forall a \in \mathbb{R}^2\,, b \in \mathbb{R}^2$ pätee $a + b = b + a$

1.1. *Huomautus.* Tässä kohdassa $(A3)$ oleva 0 on nolla-alkio ja kohdassa $(A4)$ luvun a vasta-alkio on $-a$. Yhteenlasku on assosiatiivinen eli liitännäinen, $(A2)$. Koska yhteenlasku on kommutatiivinen eli vaihdannainen $(A5)$, niin $(\mathbb{R}^2, +)$ on Abelin ryhmä. Tätä reaalista vektoriavaruutta sanotaan euklidiseksi tasoksi.

Date: 04092015.

1.2. *Huomautus.* Kertauksena reaalisen vektoriavaruuden määritelmä: $\mathbb{V}$ on reaalinen vektoriavaruus, jos $(\mathbb{V},+)$ on Abelin ryhmä ja reaalisella skalaarilla kertominen toteuttaa seuraavat

$(M1)$ $\forall\lambda \in \mathbb{R}\,, v \in \mathbb{V}$ pätee $\lambda v \in \mathbb{V}$

$(M2)$ $\forall\lambda\,,\mu \in \mathbb{R}\,, v \in \mathbb{V}$ pätee $(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$

$(M3)$ yksikköalkiolle $1 \in \mathbb{R}$ ja $\forall v \in \mathbb{V}$ pätee $1v = v$

ja

$(D1)$ $\forall\lambda \in \mathbb{R}\,,$ ja $\forall v, u \in \mathbb{V}$ pätee $\lambda(v+u) = \lambda v + \lambda u$

$(D2)$ $\forall\lambda\,,\mu \in \mathbb{R}\,,$ ja $v \in \mathbb{V}$ pätee $(\lambda+\mu)v = \lambda v + \mu v\,.$

Kerrataan kunta-aksiomat.

1.1. **Kunta-aksiomat.** Olkoon $\mathcal{K}$ joukko alkioita. Olkoon $+$ hyvin määritelty laskutoimitus ja $\cdot$ hyvin määritelty laskutoimitus. Tällöin $(\mathcal{K},+,\cdot)$ on kunta, jos $(\mathcal{K},+)$ on Abelin ryhmä eli

$(A1)$ $\forall a \in \mathcal{K}\,, b \in \mathcal{K}$ pätee $a+b \in \mathcal{K}$

$(A2)$ $\forall a \in \mathcal{K}\,, b \in \mathcal{K}\,, c \in \mathcal{K}$ pätee $(a+b)+c = a+(b+c)$

$(A3)$ $\exists_1\ 0 \in \mathcal{K}$ siten, että $\forall a \in \mathcal{K}$ pätee $a+0 = a = 0+a$

$(A4)$ $\forall a \in \mathcal{K}\ \exists_1\ -a \in \mathcal{K}$ siten, että $\forall a \in \mathcal{K}$ pätee $a+(-a) = (-a)+a = 0$

$(A5)$ $\forall a \in \mathcal{K}\,, b \in \mathcal{K}$ pätee $a+b = b+a$

ja $(\mathcal{K}\backslash\{0\},\cdot)$ on Abelin ryhmä eli

$(B1)$ $\forall a \in \mathcal{K}\,, b \in \mathcal{K}$ pätee $a\cdot b \in \mathcal{K}$

$(B2)$ $\forall a \in \mathcal{K}\,, b \in \mathcal{K}\,, c \in \mathcal{K}$ pätee $(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$

$(B3)$ $\exists_1\ 1 \in \mathcal{K}$ siten, että $\forall a \in \mathcal{K}$ pätee $a\cdot 1 = a = 1\cdot a$

$(B4)$ $\forall a \in \mathcal{K}\backslash\{0\}$on olemassa yksikäsitteinen $a^{-1} \in \mathcal{K}$ siten, että pätee $a\cdot a^{-1} = a^{-1}\cdot a = 1$

$(B5)$ $\forall a \in \mathcal{K}\,, b \in \mathcal{K}$ pätee $a\cdot b = b\cdot a$

ja osittelulaki on voimassa eli

(D) $\forall a \in \mathcal{K}\,, b \in \mathcal{K}\,, c \in \mathcal{K}$ pätee $(a+b)c = ac+bc$

1.3. *Huomautus.* Tässä 0 on nolla-alkio, alkion a vasta-alkio on $-a$, 1 on ykkösalkio eli neutraalialkio, alkion $a \in \mathcal{K}\backslash\{0\}$ käänteisalkio on a^{-1}.

1.4. **Esimerkki.** Olkoot $+$ ja $\cdot$ tavalliset reaalilukujen yhteen- ja kertolasku.

(1) $(\mathbb{R},+,\cdot)$

(2) $(\mathbb{Q},+,\cdot)$

(3) $(\mathbb{Q}(\sqrt{2}),+,\cdot) = (\{a+b\sqrt{2} | a,b \in \mathbb{Q}\},+,\cdot)$

ovat kuntia.

1.5. *Huomautus.* (1) $(A1)-(A5)$ ja $(B1)-(B3)$ ja $(B5)$ antavat, että $(\mathcal{K},+,\cdot)$ on kommutatiivinen rengas.
(2) $(B4)$ on oleellinen kunnalle.

1.6. **Esimerkki.** (1) $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ on kommutatiivinen rengas.
(2) $(\mathcal{M}(n\times n),+,\cdot)$, missä matriisin alkiot $a_{i,j}\in\mathbb{R}$, $i,j=1,\cdots,n$, on ei-kommutatiivinen rengas. Tässä $+$ ja $\cdot$ ovat matriisien tavalliset yhteen- ja kertolaskut.

1.7. *Huomautus.* Kertausta: Luvuille $x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$ ja $u=(u_1,u_2)\in\mathbb{R}^2$ määritellään sisätulo asettamalla

$$((x_1,x_2)|(u_1,u_2))=x_1u_1+x_2u_2.$$

Tässä siis on kuvaus $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$. Usein merkintänä on myös $\langle x|u\rangle$. Joskus merkintänä on $x\cdot u$, jota merkintää ei käytetä sisätulon yhteydessä tällä kurssilla.

1.8. **Kompleksitaso ja kompleksiluvut.** Tarkoituksemme on määritellä tason lukupareille kertolasku, joka tekee tasosta kunnan. Varustetaan $\mathbb{R}^2$ pisteiden $x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$ ja $u=(u_1,u_2)\in\mathbb{R}^2$ tulolla eli kertolaskulla

$$x\cdot u=(x_1,x_2)\cdot(u_1,u_2)\;:=(x_1u_1-x_2u_2,x_1u_2+x_2u_1)\,.$$

Tällöin $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ on kunta. Kuntaa $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ merkitään symbolilla $\mathbb{C}$ ja sanotaan kompleksitasoksi. Kunnan $\mathbb{C}$ lukupareja sanotaan kompleksiluvuiksi.

Todennetaan vielä, että $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ on kunta: Ensinnäkin $(\mathbb{R}^2,+)$ on Abelin ryhmä, mikä on jo todettu. Lisäksi $(\mathbb{R}^2\backslash\{0\},\cdot)$ on Abelin ryhmä.

Nimittäin

$(B1)$ $\forall a \in \mathbb{R}^2\,, b \in \mathbb{R}^2$ pätee $a \cdot b \in \mathbb{R}^2$

$(B2)$ $\forall a \in \mathbb{R}^2\,, b \in \mathbb{R}^2\,, c \in \mathbb{R}^2$ pätee $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

$(B3)$ $\exists_1\ (1,0) \in \mathbb{R}^2$ siten, että $\forall a \in \mathbb{R}^2$ pätee $a \cdot (1,0) = a = (1,0) \cdot a$;

syy : $(a_1, a_2) \cdot (1,0) = (a_1 \cdot 1 - a_2 \cdot 0, a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 1) = (a_1, a_2)$

ja $(1,0) \cdot (a_1, a_2) = (1 \cdot a_1 - 0 \cdot a_2, 1 \cdot a_2 + 0 \cdot a_1) = (a_1, a_2)\,.$

Sanotaan, että $(1,0)$ on neutraalialkio eli ykkösalkio.

$(B4)$ $\forall a \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}\,, a = (a_1, a_2)\,,$ on olemassa yksikäsitteinen käänteisalkio

$(\frac{a_1}{a_1^2 + a_2^2}, \frac{-a_2}{a_1^2 + a_2^2}) =: a^{-1}$; syy $a^{-1} \in \mathbb{R}^2$ siten, että

pätee $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$

$(B5)$ $\forall a \in \mathbb{R}^2\,, b \in \mathbb{R}^2$ pätee $a \cdot b = b \cdot a$

Lisäksi osittelulaki on voimassa eli

$$(D) \quad \forall a \in \mathbb{R}^2\,, b \in \mathbb{R}^2\,, c \in \mathbb{R}^2 \text{ pätee } (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

1.9. *Huomautus.* Kohta $(B4)$ tarkemmin: Olkoon $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$. Vaatimus käänteisalkion $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ olemassaololle on: $a \cdot x = (1,0) = x \cdot a$ eli $a \cdot x = (a_1 x_1 - a_2 x_2, a_1 x_2 + a_2 x_1) = (1,0)$ ja $x \cdot a = (1,0)\,.$ Tämä pätee, jos ja vain jos

$$\begin{cases} a_1 x_1 - a_2 x_2 = 1 \\ a_1 x_2 + a_2 x_1 = 0\,. \end{cases}$$

Tämä on yhtälöryhmä tuntemattomien x_1 ja x_2 suhteen, ja sitä vastaavan matriisin determinantti on ${a_1}^2 + {a_2}^2 \neq 0\,.$ Siis tämä yhtälöryhmä on yksikäsitteisesti ratkeava. Saamme

$$x = (x_1, x_2) = \Big(\frac{a_1}{{a_1}^2 + {a_2}^2}, \frac{-a_2}{{a_1}^2 + {a_2}^2}\Big)\,. \tag{1.1}$$

Kohdassa $(B4)$ saamaamme pistettä x sanotaan luvun $a = (a_1, a_2)$ käänteisalkioksi ja merkitään a^{-1}. Käytämme myös merkintää $\frac{1}{a}\,.$

1.10. *Huomautus.* (1) Merkitsemme usein lyhyesti $z_1 \cdot z_2 = z_1 z_2\,.$

(2) Olkoon $z \in \mathbb{C}$. Määrittelemme $z^0 = (1,0)$ ja jokaiselle luvulle $n \in \mathbb{N}$ määrittelemme $z^n = z \cdot z^{n-1}$.

1.11. **Lause.** *Joukko*

$$\{(x,0) | x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$$

on kompleksilukujen kunnan $\mathbb{C}$ *on alikunta. Lisäksi kuvaus* $f : \mathbb{R} \to \{(x,0) | x \in \mathbb{R}\}\,,\ f(x) = (x,0)$ *on kuntaisomorfismi.*

1.12. *Huomautus.* Edellä olevan lauseen avulla voidaan samaistaa $x \in \mathbb{R}$ ja $(x, 0) \in \mathbb{C}$. Siis $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ eli reaaliluvut ovat kompleksilukujen aito osajoukko.

1.13. **Määritelmä.** Kutsumme kompleksilukua $(0, 1) \in \mathbb{C}$ **imaginaariyksiköksi**, ja merkitsemme $(0, 1) =: i$.

1.14. *Huomautus.* Kertolaskun määritelmän ja Huomautuksen 1.12 nojalla

$$i^2 = (0, 1)^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1 .$$

Lisäksi esimerkiksi

$$\begin{aligned} i^3 &= i \cdot i^2 = -i , \\ i^4 &= i \cdot i^3 = i \cdot (-i) = -i^2 = 1 . \end{aligned}$$

1.15. **Lause.** *Jokainen kompleksiluku $z \in \mathbb{C}$ voidaan yksikäsitteisellä tavalla esittää muodossa $z = x + iy$, missä $x \in \mathbb{R} , y \in \mathbb{R}$.*

Todistus. Tason pisteelle z pätee kompleksilukujen yhteenlaskun ja kertolaskun, Määritelmän 1.13 ja Huomautuksen 1.12 nojalla

$$\begin{aligned} z &= (x, y) = (x, 0) + (0, y) = x \cdot (1, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0) \\ &= x \cdot (1, 0) + i(y, 0) = x + iy . \end{aligned}$$

Yksikäsitteisyys: Olkoot $z = x + iy = a + ib$, missä $x , y , a , b \in \mathbb{R}$. Siis

$$(x, 0) + (0, 1)(y, 0) = (a, 0) + (0, 1)(b, 0) .$$

Siis kertolaskun määritelmän perusteella

$$(x, 0) + (0, y) = (a, 0) + (0, b) ,$$

ja yhteenlaskun määritelmän nojalla

$$(x, y) = (a, b) .$$

Siis

$$(x - a, y - b) = (0, 0) .$$

Siis $x = a$ ja $y = b$, sillä tason $\mathbb{R}^2$ lukuparit ovat samoja, jos ja vain jos lukuparien vastaavat koordinaatit ovat samoja. $\square$

1.16. **Määritelmä.** Olkoon $z = x + iy \in \mathbb{C}$, missä $x \in \mathbb{R}$ ja $y \in \mathbb{R}$. Luvun z **liittoluku** eli **kompleksikonjugaatti** on

$$\bar{z} := x - iy .$$

Luvun z **moduli** on

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} .$$

Luvun z **reaaliosa** on $\mathrm{Re}(z) := x \in \mathbb{R}$ ja **imaginaariosa** on $\mathrm{Im}(z) := y \in \mathbb{R}$.

1.17. *Huomautus.* (1) Liittoluvun ottaminen vastaa peilausta reaaliakselin suhteen.
(2) Moduli on kompleksiluvun määräämän pisteen etäisyys origosta.
(3) Joukko $\{z | \operatorname{Im}(z) = 0\}$ on reaaliakseli ja joukko $\{z | \operatorname{Re}(z) = 0\}$ on imaginaariakseli .

1.18. **Lause.** *Kaikilla* $z_1, z_2, z \in \mathbb{C}$ *pätee*

$$\overline{z_1} + \overline{z_2} = \overline{z_1 + z_2}$$
$$\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = \overline{z_1 \cdot z_2}$$
$$\bar{\bar{z}} = z \, .$$

1.19. **Esimerkki.** Olkoon $z = \sqrt{3} + i$. Silloin $\operatorname{Re}(z) = \sqrt{3}$, $\operatorname{Im}(z) = 1$, $|z| = 2$ ja $\bar{z} = \sqrt{3} - i$.

1.20. **Lause.** *Kaikilla* $z \in \mathbb{C}$ *pätee*

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$$
$$\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z}) \, .$$

1.21. *Huomautus.* (1) Sanotaan, että kompleksiluku z **puhtaasti reaalinen**, jos $\operatorname{Im}(z) = 0$.
(2) Sanotaan, että kompleksiluku z on **puhtaasti imaginaarinen**, jos $\operatorname{Re}(z) = 0$.

1.22. *Huomautus.* (1) Kompleksiluku z on puhtaasti reaalinen, jos ja vain jos

$$z = \overline{z} \, .$$

(2) Kompleksiluku z on puhtaasti imaginäärinen, jos ja vain jos

$$z = -\overline{z} \, .$$

1.23. **Lause.** *Kaikilla* $z \in \mathbb{C}$ *pätee*

$$|-z| = |z|$$
$$|\overline{z}| = |z|$$
$$z \cdot \overline{z} = |z|^2 \, . \tag{1.2}$$

1.24. *Huomautus.* Erityisesti kohta (1.2) on tärkeä. Tapa laskea luvun $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ käänteisluku on seuraava

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} \, .$$

1.25. **Kolmioepäyhtälö.** Olkoot $z \in \mathbb{C}$ ja $w \in \mathbb{C}$. Silloin

$$|z+w| \le |z| + |w| \,.$$

Todistus.

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= (z+w)(\overline{z+w}) \\ &= (z+w)(\overline{z}+\overline{w}) \\ &= z\overline{z} + z\overline{w} + \overline{z}w + w\overline{w} \\ &= |z|^2 + z\overline{w} + \overline{z\overline{w}} + |w|^2 \,. \end{aligned}$$

Modulin määritelmän nojalla

$$\mathrm{Re}(z\overline{w}) \le |z\overline{w}| \,.$$

Siis

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &\le |z|^2 + 2|z||\overline{w}| + |w|^2 \\ &\le |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 \\ &= (|z|+|w|)^2 \,. \end{aligned}$$

Ottamalla neliöjuuri kummaltakin puolelta saadaan väite.

TAI

Siis

$$(|z+w| - (|z|+|w|))(|z+w| + (|z|+|w|)) \le 0 \,.$$

Väite seuraa.

□

Huomaa, että yhteenlasku ja vähennyslasku voidaan tulkita geometrisesti.

1.26. **Suunnikassääntö.** Olkoot z ja w kompleksilukuja. Silloin

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2) \,.$$

Todistus.

$$\begin{aligned} |z+w|^2 + |z-w|^2 &= (z+w)(\overline{z+w}) + (z-w)(\overline{z-w}) \\ &= z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w} + z\bar{z} - z\bar{w} - w\bar{z} + w\bar{w} \\ &= 2(|z|^2 + |w|^2) \,. \end{aligned}$$

□

1.27. **Kompleksiluvun argumentti.** Olkoon $z = x + iy$ kompleksiluku, missä $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ ja $x^2 + y^2 > 0$. Luvun z argumentti on sellainen kulma ψ, jolle

$$\cos\psi = \frac{x}{|z|}$$

ja

$$\sin \psi = \frac{y}{|z|}.$$

Geometrisesti argumentti on kulma, jonka origosta pisteeseen (x, y) piirretty jana muodostaa positiivisen reaaliakselin kanssa. Kaikille kompleksiluville $z \neq 0$ on olemassa argumentti. Argumentti ei kuitenkaan ole yksikäsitteinen. Argumentti on määritelty luvun 2π monikertaa vaille. Huomautuksessa 1.35 on argumentin rajoittamisesta jollekin 2π-pituiselle välille.

1.28. **Esimerkki.** $\arg(\sqrt{3} + i) = \pi/6 + n2\pi\,, n \in \mathbb{Z}\,.$

1.29. **Moduli-argumentti -esitys.** (Kompleksiluvun polaariesitys. Napakoordinaattiesitys) Nyt siis jokainen kompleksiluku $z = x + iy \neq 0$ voidaan esittää muodossa

$$z = |z| \cos \psi + i|z| \sin \psi = |z|(\cos \psi + i \sin \psi)\,,$$

eli

$$z = r(\cos \psi + i \sin \psi)\,, \tag{1.3}$$

missä

$$r = |z| \text{ ja } \psi = \arg(z)\,.$$

(Jos $z = 0$, niin $|z| = 0$, ja siis edellä oleva esitys pätisi mielivaltaisella ψ.)

1.30. **Kompleksilukujen kertominen.** Jos

$$z_1 = r_1(\cos \psi_1 + i \sin \psi_1)$$

ja

$$z_2 = r_2(\cos \psi_2 + i \sin \psi_2)\,,$$

niin kompleksilukujen kertolaskun määritelmän ja reaalisten cosinin ja sinin yhteenlaskusääntöjen nojalla

$$\begin{aligned} &z_1 \cdot z_2 \\ &= r_1 r_2((\cos \psi_1 \cos \psi_2 - \sin \psi_1 \sin \psi_2) + i(\cos \psi_1 \sin \psi_2 + \sin \psi_1 \cos \psi_2)) \\ &= r_1 r_2(\cos(\psi_1 + \psi_2) + i \sin(\psi_1 + \psi_2))\,. \end{aligned}$$

Huomaa tämän geometrinen merkitys.

1.31. **Lause.** *Kaikilla $z, w \in \mathbb{C}$ pätee*

$$|z \cdot w| = |z||w|\,.$$

Jos lisäksi $z \neq 0$ ja $w \neq 0$, niin

$$\arg(zw) = \arg z + \arg w + n2\pi\,.$$

1.32. *Huomautus.* Geometrisesti: Tulossa saadun kompleksiluvun moduli on alkuperäisten kompleksilukujen modulien tulo ja tulossa saadun kompleksiluvun argumentti on alkuperäisten kompleksilukujen argumenttien summa ($+2n\pi$). Siis kompleksilukujen kertolaskun yhteydessä napakoordinaattiesitys on selkeämpi ja yhteenlaskun yhteydessä karteesinen muoto on selkeämpi.

Jos $\beta \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ on kiinteä kompleksiluku, niin kuvauksessa

$$z \mapsto \beta z$$

muuttujan z moduli kerrotaan luvun β modulilla ja muuttujan z argumenttiin lisätään luvun β argumentti. Siis tämä kuvaus on venytys yhdistettynä kiertoon tai kutistus yhdistettynä kiertoon.

1.33. **Esimerkki.** Kuvaus $z \mapsto iz$ on kierto 90^o vastapäivään.

1.34. **Lause.** *Kaikilla* $z \in \mathbb{C}$ *ja* $w \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ *pätee*

$$\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}\,.$$

Jos lisäksi myös $z \neq 0$, *niin*

$$\arg\left(\frac{z}{w}\right) = \arg z - \arg w + 2\pi n\,.$$

Todistus.

$$|z| = \left|\frac{z}{w}w\right| = \left|\frac{z}{w}\right||w|\,.$$

$$\arg z = \arg\left(\frac{z}{w}w\right) = \arg\left(\frac{z}{w}\right) + \arg w + n2\pi\,.$$

□

1.35. *Huomautus.* Argumentin päähaara $\mathrm{Arg}(z)$ on argumenttina välillä $(-\pi, \pi]$, ja on siis yksikäsitteinen.

Muukin väli kuin $(-\pi, \pi]$ voidaan valita, esimerkiksi $(0, 2\pi]$, kunhan välin pituus on 2π.

1.36. *Huomautus.* Huomaa, että vaikka $(-i)\cdot(-i) = i^2 = -1$, niin

$$\mathrm{Arg}(-1) = \pi \neq \mathrm{Arg}(-i) + \mathrm{Arg}(-i) = -\frac{\pi}{2} + (-\frac{\pi}{2}) = -\pi\,.$$

Myös

$$\mathrm{Arg}(-\frac{1}{2}) = \pi \neq \mathrm{Arg}(1) - \mathrm{Arg}(-2) = 0 - \pi = -\pi\,.$$

Induktiolla voidaan helposti todistaa

1.37. **De Moivre'n kaavat.** (Abraham de Moivre (1667(Ranska)–1754(Englanti)).

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha\,,$$

missä $n \in \mathbb{Z}\,,\ \alpha \in \mathbb{R}\,.$

Todistus. Jos $n = 0$, niin väite on tosi. Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Todistamme väitteen induktiolla.

Jos $n = 1$, niin väite on selvä.

Oletamme, että väite pätee, kun $n = k$ ja osoitamme, että väite pätee, kun $n = k + 1$.

Induktio-oletuksen nojalla ja cosinin ja sinin yhteenlaskukaavojen avulla saamme

$$\begin{aligned}(\cos\psi + i\sin\psi)^{k+1} &= (\cos\psi + i\sin\psi)^k(\cos\psi + i\sin\psi)\\ &= (\cos k\psi + i\sin k\psi)(\cos\psi + i\sin\psi)\\ &= \cos(k\psi)\cos\psi - \sin(k\psi)\sin\psi\\ &+ i(\cos(k\psi)\sin\psi + \sin(k\psi)\cos\psi)\\ &= \cos(k+1)\psi + i(\sin(k+1)\psi)\,.\end{aligned}$$

Olkoon nyt n negatiivinen kokonaisluku. Silloin $n = -p$, missä p on positiivinen kokonaisluku. Siis de Moivre'n kaavan nojalla luvulle p saamme

$$\begin{aligned}(\cos\psi + i\sin\psi)^n &= (\cos\psi + i\sin\psi)^{-p}\\ &= \frac{1}{(\cos\psi + i\sin\psi)^p}\\ &= \frac{1}{\cos p\psi + i\sin p\psi}\\ &= \frac{\cos p\psi - i\sin p\psi}{\cos^2 p\psi + \sin^2 p\psi}\\ &= \cos p\psi - i\sin p\psi\\ &= \cos n\psi + i\sin n\psi\,.\end{aligned}$$

□

1.38. **Esimerkki.** Osoita, että

$$\cos 2\beta = 2\cos^2\beta - 1\,,\ \beta \in \mathbb{R}\,.$$

Todistus.

$$\begin{aligned}\cos 2\beta &= \mathrm{Re}(\cos 2\beta + i\sin 2\beta)\\ &= \mathrm{Re}(\cos\beta + i\sin\beta)^2\\ &= \mathrm{Re}(\cos^2\beta - \sin^2\beta + 2i\cos\beta\sin\beta)\\ &= \cos^2\beta - \sin^2\beta\\ &= \cos^2\beta - (1-\cos^2\beta)\,.\end{aligned}$$

□

1.39. **Esimerkki.** Osoita, että

$$\cos 3\beta = 4\cos^3\beta - 3\cos\beta\,,\, \beta\in\mathbb{R}\,.$$

Todistus.

$$\begin{aligned}\cos 3\beta &= \mathrm{Re}(\cos 3\beta + i\sin 3\beta)\\ &= \mathrm{Re}(\cos\beta + i\sin\beta)^3\\ &= \mathrm{Re}(\cos^3\beta - 3\cos\beta\sin^2\beta + 3i\cos^2\beta\sin\beta - i\sin^3\beta)\\ &= 4\cos^3\beta - 3\cos\beta\,.\end{aligned}$$

□

1.40. **Eulerin kaava.** Olkoon $\psi\in\mathbb{R}$. Otamme merkinnän

$$\cos\psi + i\sin\psi =: \exp(i\psi) \tag{1.4}$$

käyttöön. Huomaa, että otamme tämän vain merkintänä. Yhtälön (1.4) oikea puoli on vain lyhennetty merkintä yhtälön vasemmalle puolelle. Kaava on nimeltään Eulerin kaava ja perustelemme sen myöhemmin.

Käyttäen merkintää (1.4) esitys (1.3) voidaan kirjoittaa

$$z = r\exp(i\psi)\,.$$

Tällä merkinnällä kahden kompleksiluvun tulo voidaan kirjoittaa lyhyesti: Olkoot $z_1 = r_1\exp(i\psi_1)$ ja $z_2 = r_2\exp(i\psi_2)$. Silloin

$$z_1z_2 = r_1r_2(\cos(\psi_1+\psi_2) + i(\sin(\psi_1+\psi_2)) = r_1r_2\exp(i(\psi_1+\psi_2))\,.$$

De Moivre'n kaavat saavat mös lyhyen muodon tällä merkinnällä.

De Moivre'n kaavojen sovelluksia:

1.41. **Esimerkki.** Määrää $(1+i)^{20}$.

Ratkaisu: Kirjoitetaan $1+i$ muodossa $\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$ Silloin De Moivre'n kaavojen nojalla ja cos ja sin funktioiden jaksollisuuden perusteella

$$\begin{aligned}(1+i)^{20} &= \left(\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{20}\\ &= 2^{10}(\cos(20\frac{\pi}{4})+i\sin(20\frac{\pi}{4}))\\ &= 2^{10}(\cos 5\pi + i\sin 5\pi)\\ &= 2^{10}(\cos\pi + i\sin\pi) = -1024\,.\end{aligned}$$

TAI
Kirjoitetaan $1+i$ muodossa $\sqrt{2}\exp(i\pi/4)$. Silloin

$$\begin{aligned}(1+i)^{20} &= \left(\sqrt{2}\exp(i\pi/4)\right)^{20}\\ &= 2^{10}\exp(5\pi i) = -1024\,.\end{aligned}$$

Ei haittaa, mikä napakoordinaattiesitys luvulle $1+i$ valitaan, koska on olemassa vain yksi vastaus luvulle $(1+i)^{20}$.

1.42. **Binomiyhtälön ratkaiseminen.** Olkoot $a=|a|(\cos\psi+i\sin\psi)$ nollasta poikkeava kompleksiluku ja $n\geq 2$ kokonaisluku. Silloin

$$z^n = a\,,$$

jos ja vain jos

$$z = \sqrt[n]{|a|}\big(\cos\big(\frac{\psi+k2\pi}{n}\big)+i\sin\big(\frac{\psi+k2\pi}{n}\big)\big)\,,$$

missä $k=0\,,1\,,\cdots\,,n-1$.

Perustelu: Olkoon siis $a=|a|(\cos\psi+i\sin\psi)\neq 0$. Tarkoitus on löytää kaikki kompleksiluvut $z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)$, joille $z^n-a=0$. Silloin de Moivre'n kaavan nojalla

$$\begin{aligned}|a|(\cos\psi+i\sin\psi) &= |z|^n(\cos\theta+i\sin\theta)^n\\ &= |z|^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)\,,\end{aligned}$$

joten

$$\begin{aligned}|z|^n &= |a|\\ \cos n\theta &= \cos\psi\\ \sin n\theta &= \sin\psi\,.\end{aligned}$$

Siis

$$\begin{aligned}|z| &= \sqrt[n]{|a|}\\ n\theta &= \psi + k2\pi\,,\end{aligned}$$

$k \in \mathbb{Z}$ eli

$$\begin{aligned}|z| &= \sqrt[n]{|a|}\\ \theta &= \frac{\psi + k2\pi}{n}\,,\end{aligned}$$

$k \in \mathbb{Z}$. Koska valinnalla $k = 0\,,1\,,2\,,\cdots\,,n-1$ saadaan erilliset ratkaisut, niin

$$z = \sqrt[n]{|a|}\big(\cos(\frac{\psi + k2\pi}{n}) + i\sin(\frac{\psi + k2\pi}{n})\big)\,,$$

kun $k = 0\,,1\,,2\,,\cdots\,,n-1$.

Toisaalta kyseiset kompleksiluvut toteuttavat alkuperäisen yhtälön.

1.43. *Huomautus.* Olkoon $a \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ annettu ja olkoon $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Yhtälön $z^n - a = 0$ ratkaisut sijaitsevat tasavälein origokeskisellä ympyrällä, jonka säde on $\sqrt[n]{|a|}$. Kun $n \geq 3$, niin ratkaisut ovat ko.ympyrän sisäänpiirretyn säännöllisen n-kulmion kärkipisteet.

1.44. **Esimerkki.** Määrää kaikki yhtälön $z^4 + 1 = 0$ ratkaisut.

Nyt $a = -1 = \cos\pi + i\sin\pi$ ja siis $z_k = \cos\frac{\pi+k2\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+k2\pi}{4}$, missä $k = 0, 1, 2, 3$. Siis $z_0 = (1+i)/\sqrt{2}$, $z_1 = (-1+i)/\sqrt{2}$, $z_2 = -(1+i)/\sqrt{2}$, $z_3 = (1-i)/\sqrt{2}$.

1.45. **Historiasta. Girolamo Cardano** (1501–1576) mainitsi ensimmäisenä negatiivisten lukujen neliöjuuret kirjassaan 'Ars Magna' 1545, mutta piti niitä kuitenkin hyödyttöminä.

Raphael Bombelli (1526–1572) esitteli kompleksilukujen algebralliset operaatiot ja käytti kompleksilukuja kolmannen asteen yhtälöiden ratkaisemiseen, 'L'Algebra' 1572.

Gottfried Wilhelm Leibnitz (1646–1716) ilmeisesti epäili kompleksilukujen hyötyä.

Léonard Euler (1707–1783) aloitti kompleksilukujen aktiivisen käytön matematiikassa.

Caspar Wessel (1745–1818) oli norjalais-tanskalainen maanmittausinsinööri. Kompleksilukujen geometrinen tulkinta tason vektoreina esiintyi ensimmäisenä Wesselin tanskankielisessä kirjoituksessa 1799.

Jean Robert Argand (1768–1822). Kompleksilukujen graafisen esityksen keksijänä ja kehittäjänä pidetään usein ranskalaista kirjanpitäjää ja amatöörimatemaatikkoa Argandia. Julkaisu, jossa hän uudelleen esitti kompleksilukujen geometrisen tulkinnan, on vuodelta 1806. Graafista esitystä sanotaan Argandin diagrammiksi.

Carl Friedrich Gauss (1777–1855) aloitti kompleksilukujen systemaattisen tutkimisen ja geometristen ominaisuuksien hyödyntämisen.

William Rowan Hamilton (1805–1865).

Augustin-Louis Cauchy (1789–1857).

Bernhard Riemann (1826–1866).

Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815–1897).