KOMPLEKSIANALYYSI I KURSSI
SYKSY 2014

RITVA HURRI-SYRJÄNEN

9. Cauchyn integraalilauseen globaali muoto

9.1. **Määritelmä.** Olkoot γ_j, $j = 1, \ldots, k$, suljettuja paloittain C^1-polkuja kompleksitasossa ja olkoot $n_j \in \mathbb{Z}$, $j = 1, \ldots, k$. Silloin (formaalia) äärellistä summaa

$$\sigma := \sum_{j=1}^{k} n_j \gamma_j$$

sanotaan **sykliksi**.

Jos $\gamma = \gamma_j$ jollain j, jolla $n_j \neq 0$, niin sanotaan, että polku γ kuuluu sykliin.

Sykli on kokoelma polkuja, jossa on n_j kappaletta polkuja γ_j, kun $n_j \geq 0$, ja $|n_j|$ kappaletta polkuja $\overleftarrow{\gamma}_j$, kun $n_j < 0$. Syklin

$$\sigma = \sum_{j=1}^{k} n_j \gamma_j$$

jälki on

$$|\sigma| = |\gamma_1| \cup |\gamma_2| \cup \ldots \cup |\gamma_k|.$$

Seuraava on tärkeä:

Kun funktio f on jatkuva avoimessa joukossa, johon syklin jälki $|\sigma|$ kuuluu, asetamme

$$\int_{\sigma} f(z)dz = \sum_{j=1}^{k} n_j \int_{\gamma_j} f(z)dz.$$

Syklin

$$\sigma = \sum_{j=1}^{k} n_j \gamma_j$$

Date: 14112014.

pituus on

$$\operatorname{length}(\sigma) = \sum_{j=1}^{k} |n_j| \operatorname{length}(\gamma_j).$$

9.2. **Kierroslukulemma.** Olkoot A kompleksitason avoin osajoukko ja γ suljettu paloittain C^1-polku avoimessa joukossa A. Jos piste $a \in A$ ei sijaitse polun γ jäljellä, niin integraalin

$$n(\gamma; a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z-a} \tag{1}$$

arvo on aina kokonaisluku.

Todistus: Määritellään

$$h\colon [0,1] \to \mathbb{C}, \quad h(x) = \int_0^x \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-a} dt, \text{ kun } x \in [0,1].$$

Siis

$$h(1) = \int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-a} dt = \int_\gamma \frac{d\xi}{\xi - a} = 2\pi i\, n(\gamma; a). \tag{2}$$

Polku γ on paloittain C^1-polku ja siten polun γ derivaatalla γ' on vain äärellinen määrä epäjatkuvuuskohtia. Epäjatkuvuuskohtia lukuunottamatta

$$h'(x) = \frac{\gamma'(x)}{\gamma(x)-a}, \quad a \notin |\gamma|,$$

ja siis

$$\gamma'(x) - h'(x)\big(\gamma(x) - a\big) = 0.$$

Siis

$$\frac{d}{dx}\Big(\big(\gamma(x)-a\big)\exp\left(-h(x)\right)\Big) = 0,$$

lukuunottamatta äärellistä määrää pisteitä.

Funktio

$$\phi(x) = \big(\gamma(x)-a\big)\exp(-h(x))$$

on siis vakio, koska $\phi'(x) = 0$ ja funktiot γ ja h ovat jatkuvia. Näin ollen

$$\phi(1) = \phi(0) = \big(\gamma(0)-a\big)\exp\left(-h(0)\right) \overset{e^0=1}{=} \gamma(0) - a$$

ja

$$\phi(1) = \big(\gamma(1)-a\big)\exp\left(-h(1)\right).$$

Koska γ on suljettu polku, niin $\gamma(0) = \gamma(1)$, ja siis

$$\exp(h(1)) = \frac{\gamma(1)-a}{\gamma(0)-a} = 1.$$

Siis

$$h(1) = 2\pi i n$$

jollain $n \in \mathbb{Z}$, ja kohdan (2) nojalla

$$n(\gamma; a) = n$$

jollain $n \in \mathbb{Z}$ eli väite. $\square$

9.3. **Määritelmä.** Luku

$$n(\gamma; a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{d\xi}{\xi - a}, \quad a \notin |\gamma|,$$

on suljetun paloittain C^1**-polun** γ **kierrosluku** pisteen a suhteen.

Syklin σ **kierrosluku** pisteen a suhteen on luku

$$n(\sigma; a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\sigma} \frac{dz}{z - a}, \quad a \notin |\sigma|.$$

9.4. **Esimerkki.**

(1) $\gamma_1(t) = \exp(2\pi i t)$, $t \in [0, 1]$,

$$n(\gamma_1; 0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} \frac{dz}{z} = 1,$$

$$n(\gamma_1; 2) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_1} \frac{dz}{z - 2} = 0.$$

(2) $\gamma_2(t) = \exp(4\pi i t)$, $t \in [0, 1]$,

$$n(\gamma_2; 0) = 2.$$

(3) $\gamma_3(t) = \exp(i2\pi m t), \quad t \in [0, 1]$, $m \in \mathbb{Z}$,

$$n(\gamma_3; 0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{2\pi m i \exp(i2\pi m t)}{\exp(i2\pi m t)} dt = m,$$

joka on kierrosluku.

Kertaus: **Yhtenäinen komponentti**
Olkoon joukko A avoin ja $a_0 \in A$. Olkoon $A_0 \subset A$ suurin alue, jolle $a_0 \in A$. Silloin A_0 on joukon A (yhtenäinen) komponentti, joka sisältää pisteen a_0.

9.5. **Komponenttilause.** Olkoon σ sykli tasossa $\mathbb{C}$. Silloin

(1) Kuvaus

$$a \mapsto n(\sigma; a)$$

on vakio jokaisessa joukon $\mathbb{C} \setminus |\sigma|$ komponentissa.

(2) $n(\sigma; a) = 0$ joukon $\mathbb{C} \setminus |\sigma|$ rajoittamattomassa komponentissa.

9.6. **Esimerkki.** Olkoot $\gamma_j(t) = j + j\exp(2\pi it)$, $t \in [0,1]$, $j = 1,2,3$ ja $\sigma = \gamma_1 - \gamma_2 + 3\gamma_3$. Tällöin

$$n(\sigma; \frac{1}{2}) = 1 - 1 + 3 = 3,$$
$$n(\sigma; 3) = -1 + 3 = 2,$$
$$n(\sigma; 5) = 3$$

ja

$$n(\sigma; 100) = 0.$$

9.7. **Cauchyn integraalilauseen globaali muoto.** Olkoot A kompleksitason alue ja $f\colon A \to \mathbb{C}$ analyyttinen kuvaus. Olkoon σ sykli alueessa A siten, että

$$n(\sigma; b) = 0$$

kaikilla $b \in \mathbb{C} \setminus A$. Tällöin

$$n(\sigma; z)f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\sigma \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi, \tag{3}$$

kaikilla $z \in A \setminus |\sigma|$ ja

$$\int_\sigma f(\xi)d\xi = 0.$$

Sanonta: Kaava (3) on Cauchyn globaali integraalikaava.

Seurauksena saadaan

9.8. **Cauchyn integraalilause yhdesti yhtenäisissä alueissa.** Olkoot A kompleksitason yhdesti yhtenäinen alue ja $f\colon A \to \mathbb{C}$ analyyttinen kuvaus. Tällöin

$$n(\sigma; z)f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\sigma \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi,$$

kaikilla $z \in A \setminus |\sigma|$ ja jokaisella alueen A syklillä σ. Lisäksi

$$\int_\sigma f(\xi)d\xi = 0.$$

9.9. *Huomautus.* Olkoon $A = \mathbb{D}(z_0, R)$. Silloin $n(\sigma, b) = 0$ kaikilla kiekon $\mathbb{D}(z_0, R)$ komplementin pisteillä b, kun σ on kiekossa oleva sykli.

Cauchyn integraalikaavan lokaali muoto seuraa siis Cauchyn integraalikaavan globaalista muodosta.

9.10. *Huomautus.* Olkoon $A = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Olkoon σ mikä tahansa sykli, jolle

$$n(\sigma; 0) = 0.$$

Silloin

$$n(\sigma; z) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\sigma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi, \ z \in A \setminus |\sigma|,$$

pätee kaikilla alueessa $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ analyyttisillä funktioilla f.

9.11. *Huomautus.* Kierroslukutekijä $n(\sigma; z)$ on välttämätön Cauchyn integraalikaavan globaalissa muodossa.

Olkoot A alue ja $f\colon A \to \mathbb{C}$ analyyttinen funktio ja z_0 alueen A piste. Oletetaan, että z_0-keskisen R-säteisen kiekon sulkeuma sisältyy alueeseen A.

Valitaan $\sigma = 7\, \partial^+ \mathbb{D}(z_0, R)$. Silloin

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\sigma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{7}{2\pi i} \int_{\partial^+ \mathbb{D}(z_0, R)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = 7\, f(z)$$

kaikilla $z \in \mathbb{D}(z_0, R)$ Cauchyn lokaalin integraalikaavan nojalla.

Cauchyn integraalikaavan globaalin muodon seuraus on seuraava erittäin tärkeä tulos.

9.12. **Polkujen deformointi-lause.** Olkoot A alue, f analyyttinen alueessa A ja σ_1 ja σ_2 alueessa A syklejä, joille

$$n(\sigma_1, b) = n(\sigma_2, b)$$

kaikilla $b \in \mathbb{C} \setminus A$. Silloin

$$\int_{\sigma_1} f(\xi) d\xi = \int_{\sigma_2} f(\xi) d\xi.$$

9.1. **Cauchyn lauseen globaalin muodon todistaminen.** Tässä on todistuksen runko.
1. Määritellään funktio $F : A \times A \to \mathbb{C}$,

$$F(z, \xi) = \begin{cases} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z}, \ \text{kun } \xi \neq z\,, \\ f'(\xi) = f'(z)\,, \ \text{kun } \xi = z\,. \end{cases}$$

Funktio F on jatkuva.

2. Määritellään funktio $h : A \to \mathbb{C}$,

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\sigma F(z,\xi)\, d\xi\,.$$

Funktio $h : A \to \mathbb{C}$ on jatkuva.
3. Funktio h on analyyttinen alueessa A.
4. Kuvaus

$$z \mapsto g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\sigma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi$$

on analyyttinen joukossa $\mathbb{C} \backslash |\sigma|$.
5. Merkitään

$$B = \{z \in \mathbb{C} \backslash |\sigma| : n(\sigma, z) = 0\}\,.$$

Määritellään funktio $H : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ siten, että

$$H(z) = \begin{cases} h(z)\,, & \text{kun } z \in A\,, \\ g(z)\,, & \text{kun } z \in B\,, \end{cases}$$

jolloin H on yksikäsitteisesti määritelty. Funktio H on analyyttinen koko kompleksitasossa $\mathbb{C}$.
6. Funktio H on rajoitettu ja siten analyyttisenä funktiona koko kompleksitasossa $\mathbb{C}$ funktio H on vakio. Itseasiassa $H(z) \equiv 0$. Siis myös $h(z) = 0$ kaikilla $z \in A$.

9.13. **Historiaa.** Tässä esitetty Cauchyn globaalin integraalilauseen todistuksen runko on ns. Dixonin todistuksen runko. Se perustuu John D. Dixonin eleganttiin todistukseen, A brief proof of Cauchy's integral theorem, Proc. Amer. Math. Soc. 29, (1971), 625-626. Todistuksemme seuraa Astalan luentojen todistusta.