KOMPLEKSIANALYYSI I KURSSI
SYKSY 2014

RITVA HURRI-SYRJÄNEN

8. Integraalilauseiden sovelluksia

1. **Analyyttisen funktion sarjaesitys.**

(eli jokainen analyyttinen funktio on lokaalisti suppenevan potenssisarjan summa.)

Kertausta:
Weierstrassin kriteeri. Olkoot $f_n\colon A \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, kompleksimuuttujan funktioita ja M_n, $n \in \mathbb{N}$, positiivisia lukuja. Olkoon

$$|f_n(z)| \leq M_n$$

kaikilla $z \in A$ ja $n \in \mathbb{N}$. Jos sarja

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_n$$

suppenee, niin sarja

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$$

suppenee tasaisesti joukossa A.

Todistus:

$$\sup_{z\in A}\Big|\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) - \sum_{n=0}^{k} f_n(z)\Big| \leq \sup_{z\in A}\Big(\sum_{n=k+1}^{\infty} |f_n(z)|\Big) \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} M_n \to 0,$$

kun $n \to \infty$. Siis funktiosarjan jäännöstermi

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} f_n(z)$$

menee tasaisesti joukossa A kohti lukua 0.

Date: 07112014.

8.1. **Analyyttisen funktion sarjaesitys-lause.** Olkoon f analyyttinen funktio kompleksitason avoimessa joukossa A. Jos

$$\overline{\mathbb{D}}(z_0, r) \subset A,$$

niin kiekossa $\mathbb{D}(z_0, r)$ funktio f voidaan esittää suppenevana potenssisarjana

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

kaikilla $z \in \mathbb{D}(z_0, r)$. Tässä

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial^+ D} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi.$$

8.2. **Korollaari 1.** *(Erittäin tärkeä!) Jos funktio on analyyttinen niin myös funktion derivaatta on analyyttinen. Jokainen analyyttinen funktio on äärettömän monta kertaa derivoituva.*

Todistus: Analyyttisen funktion potenssisarja-esityslause ja Lause 4.37.

8.3. **Korollaari 2** (**Yleistetty Cauchyn integraalikaava**)**.** *Olkoon funktio f analyyttinen kompleksitason avoimessa joukossa A. Olkoot $z_0 \in A$ ja $r > 0$ siten, että $\overline{\mathbb{D}}(z_0, r) \subset A$. Silloin*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial^+ \mathbb{D}(z_0, r)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi.$$

Todistus: Analyyttisen funktion potenssisarja-esityslause ja Korollaari 4.38.

8.4. **Esimerkki.** Määrää

$$\oint_{|z|=1} \frac{\sin(z)}{z^2(z-2)} dz,$$

kun yksikkökiekon kehä kuljetaan positiiviseen kiertosuuntaan.
<u>Ratkaisu:</u>

$$\oint_{|z|=1} \frac{\sin(z)}{z^2(z-2)} dz = \oint_{|z|=1} \frac{\frac{\sin(z)}{z-2}}{z^2} dz = \frac{2\pi i}{1!} f'(0) = 2\pi i \frac{(0-2)\cos 0 - \sin 0}{(0-2)^2}$$
$$= -\pi i,$$

koska kuvaus

$$z \mapsto \frac{\sin(z)}{z-2}$$

on analyyttinen kiekossa $\mathbb{D}(0, \frac{3}{2})$ ja

$$\frac{d}{dz}\frac{\sin(z)}{z-2} = \frac{(z-2)\cos z - \sin z}{(z-2)^2}.$$

8.5. **Integraalifunktion karakterisaatiolause kiekossa.** Olkoon f avoimessa kiekossa jatkuva funktio. Silloin funktiolla f on integraalifunktio, jos ja vain jos funktio f on analyyttinen.

Todistus: " $\Longrightarrow$ " Jos funktiolla f on integraalifunktio F, niin integraalifunktion määritelmän mukaan F on analyyttinen ja Korollaarin 1 mukaan $F' = f$ on analyyttinen.
" $\Longleftarrow$ " Todistettu Cauchyn-Goursatin teoreeman todistuksessa.

8.6. *Huomautus.* Edellisen karakterisaatiolauseen ensimmäisen suunnan todistuksen perusteella: Jos kompleksitason **alueessa** jatkuvalla funktiolla on integraalifunktio, niin funktio on analyyttinen.

8.7. **Moreran lause.** (Giacinto Morera, $1856 - 1907$, italialainen. Tämän lauseen todistus noin vuonna 1890.) Olkoon f jatkuva kuvaus kompleksitason alueessa. Jos

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

jokaisella suljetulla paloittain C^1-polulla γ tässä alueessa, niin funktio f on analyyttinen.

8.8. **Korollaari 3.** *Olkoon f alueessa A jatkuva funktio. Olkoon $z_0 \in A$ siten, että f on analyyttinen joukossa $A \setminus \{z_0\}$. Silloin f on analyyttinen koko alueessa A.*

8.9. *Huomautus.* Polusta riippumattomuus, analyyttisyys ja kompleksisen derivaatan olemassaolo avoimessa kiekossa (itse asiassa, yhdesti yhtenäisessä alueessa) ovat siis oleellisesti samoja asioita.

2. **Analyyttiset funktiot koko kompleksitasolta kompleksitasolle.**

Olkoon f analyyttinen funktio kompleksitason alueessa A. Oletetaan, että $\overline{\mathbb{D}}(z_0, r) \subset A$. Silloin funktiolla f on potenssisarjaesitys

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

kaikilla $z \in \mathbb{D}(z_0, r)$. Merkitsemme

$$M_r = \sup_{|z-z_0|=r} |f(z)|.$$

Silloin **potenssisarjan kertoimille** pätee **arvio**

$$|a_n| \le \frac{M_r}{r^n} \quad \text{kaikilla } n \in \mathbb{N}$$

ja **funktion f derivaatoille** pisteessä z_0 pätee **arvio**

$$|f^{(n)}(z_0)| \le n!\frac{M_r}{r^n} \quad \text{kaikilla } n \in \mathbb{N}.$$

Jälkimmäinen arvio on niin sanottu **Cauchyn arvio**.

<u>Perustelu:</u> Koska

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\xi - z_0| = r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi,$$

niin Arviolemman mukaan

$$|a_n| \le \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\xi - z_0| = r} \frac{|f(\xi)|}{|\xi - z_0|^{n+1}} |d\xi| \le \frac{1}{2\pi} \frac{M_r}{r^{n+1}} 2\pi r = \frac{M_r}{r^n}.$$

Arvio derivaatoille seuraa Yleistetystä Cauchyn integraalikaavasta.

8.10. **Liouvillen lause.** Koko tasossa analyyttinen funktio, joka on rajoitettu, on vakio.

8.11. **Historiaa.** Joseph Liouville, 1809 − 1882. Itse asiassa tämän teoreeman todisti Cauchy 1844, ja Liouville oli todistanut vain osan teoreemasta samana vuonna. Liouvillen oppilas oppi teoreeman Liouvillen luonnoilla ja oppilas viittasi siihen Liouvillen teoreemana.

Liouvillen lauseen todistus: Olkoon $M = \sup\limits_{z \in \mathbb{C}} |f(z)|$. Oletuksen nojalla $M < \infty$. Kompleksitaso $\mathbb{C}$ on alue. Käyräintegraalin 1. peruslauseen Korollaarin 2 nojalla riittää osoittaa, että

$$f'(z) = 0 \quad \text{kaikilla } z \in \mathbb{C}.$$

Olkoon $z_0 \in \mathbb{C}$ mielivaltaisesti valittu piste. Olkoon $r \in \mathbb{R}_+$. Sovelletaan yleistettyä Cauchyn integraalikaavaa

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial^+ \mathbb{D}(z_0, r)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^2} d\xi.$$

Arviolemman nojalla

$$|f'(z_0)| \le \frac{M}{r}.$$

Tässä r on mielivaltaisesti valittu ja M on vakio. Kun $r \to \infty$, saadaan

$$|f'(z_0)| = 0.$$

Siis $f'(z_0) = 0$. Koska $z \in \mathbb{C}$ oli mielivaltaisesti valittu, niin $f'(z) = 0$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$. Väite seuraa kohdasta 6.32 , Korollaari 2.
Sanonta: Jos funktio on analyyttinen koko kompleksitasossa, niin sanotaan, että funktio on *kokonainen* funktio.

8.12. **Korollaari.** *Olkoon $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analyyttinen koko kompleksitasossa. Olkoon M positiivinen reaaliluku siten, että $|f(z)| > M$ kaikilla kompleksiluvuilla z . Osoita, että funktio f on vakio.*

Todistus. Funktio $1/f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ on analyyttinen koko tasossa ja

$$\Big|\frac{1}{f(z)}\Big| < \frac{1}{M}$$

kaikilla $z \in \mathbb{C}$. Siis Liouvillen lauseen nojalla $1/f$ on vakiofunktio, ja siis itse f on vakiofunktio. □

Kokonaisen analyyttisen funktion kasvu voi olla polynomista vain jos funktio on itse polynomi:

8.13. **Polynomisen kasvun lause.** Olkoon $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analyyttinen funktio. Jos on olemassa reaalinen vakio M ja ei-negatiivinen kokonaisluku k siten, että

$$|f(z)| \le M(1 + |z|^k)$$

kaikilla $z \in \mathbb{C}$, niin funktio f on polynomi, jonka aste on korkeintaan k .

Todistus. Funktio f voidaan kirjoittaa suppenevana potenssisarjana

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \,, z \in \mathbb{C} \,,$$

missä

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\eta|=r} \frac{f(\eta)}{\eta^{n+1}} \, d\eta \,,$$

kaikilla $r > 0$. Arvioidaan kerrointa a_n Arviolemman avulla, jolloin

$$|a_n| \le \frac{1}{2\pi i} \frac{M(1 + r^k)}{r^{n+1}} 2\pi r = \frac{M(1 + r^k)}{r^n} \,.$$

Jos $n > k$, niin

$$\frac{M(1 + r^k)}{r^n} \to 0 \,, \text{ kun } r \to \infty \,.$$

Siis $a_n = 0$ kaikilla $n > k$ ja f on polynomi, jonka aste on korkeintaan k eli

$$f(z) = \sum_{n=0}^{k} a_n z^n \,, z \in \mathbb{C} \,.$$

$\square$

8.14. **Algebran peruslause.** Olkoon

$$P(z) = a_n z^n + \ldots + a_0, \quad a_n \neq 0,$$

astetta $n > 0$ oleva kompleksikertoiminen polynomi. Tällöin on olemassa piste $z_0 \in \mathbb{C}$ siten, että $P(z_0) = 0$.

8.15. **Algebran peruslauseen seuraus.** Polynomi

$$P(z) = a_n z^n + \ldots + a_0, \quad a_n \neq 0,$$

jonka aste on $n > 0$, voidaan kirjoittaa muodossa

$$P(z) = c(z - z_1) \cdots (z - z_n),$$

missä luvut z_k, $k = 1, \ldots, n$, ovat polynomin P juuret ja luku $c \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$ on vakio.

3. **Analyyttisen funktion nollakohdat ja yksikäsitteisyys.**

8.16. **Lause.** *Olkoon A alue. Jos f on analyyttinen alueessa A ja $f(z_0) = 0$ jossakin pisteessä $z_0 \in A$, niin kaikilla $z \in A$*

$$f(z) = (z - z_0) g(z),$$

missä

$$g \colon A \to \mathbb{C}$$

on analyyttinen funktio.

8.17. **Lause.** *Olkoot A alue, $\overline{\mathbb{D}}(z_0, R) \subset A$ ja erilliset pisteet $z_n \in D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$, $n \in \mathbb{N}$, siten, että $z_n \to z_0$, kun $n \to \infty$. Jos f on analyyttinen alueessa A ja $f(z_n) = 0$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, niin $f \equiv 0$.*

8.18. *Huomautus.* Analyyttisen funktion $f \colon A \to \mathbb{C}$ nollakohdat muodostavat alueen A diskreetin osajoukon eli analyyttisen funktion nollakohtien joukko voi kasaantua vain alueen A reunalle ∂A.

8.19. **Esimerkki.** Olkoon $f(z) = \exp(z^{-1}) - 1$ kaikilla $z \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$. Silloin f on analyyttinen punkteeratussa tasossa $\mathbb{C} \backslash \{0\}$. Lisäksi $f(z) = 0$, josa ja vain jos $z = -i/2\pi n$, $n \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$. Siis pisteet $z_n = -i/2\pi n$, $n \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$, kasaantuvat funktion määrittelyalueen $\mathbb{C} \backslash \{0\}$ reunalle pisteeseen $z = 0$, ja f ei ole nollafunktio.

Seurauksena saamme seuraavan analyyttisten funktioiden yksikäsitteisyyslauseen:

8.20. **Yksikäsitteisyys-korollaari.** Olkoon A alue ja olkoot f ja g alueessa A analyyttisiä funktioita. Jos on olemassa ääretön lukujono $(z_n)_1^\infty$ erillisiä pisteitä, joille $z_n \to z_0 \in A$ ja $f(z_n) = g(z_n)$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, niin $f \equiv g$.

4. **Maksimiperiaate.**

Yksi keskeisimmistä Cauchyn lokaalin integraalikaavan seurauksista on maksimiperiaate. esitämme sekä lokaalin että globaalin muodon. Tarvitsemme seuraavaa keskiarvolausetta, jonka saamme Cauchyn lokaalista integraalikaavasta suoraan.

8.21. **Gaussin keskiarvolause.** Olkoon A kompleksitason $\mathbb{C}$ alue ja olkoon funktio f alueessa A analyyttinen. Oletetaan, että

$$\overline{\mathbb{D}}(z_0, r) \subset A\,.$$

Silloin

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r\exp(it))\, dt\,.$$

Gaussin keskiarvolauseen, Arviolemman ja Lauseen 8.17 avulla saadaan

8.22. **Maksimiperiaatteen heikko muoto.** Olkoot A kompleksitason $\mathbb{C}$ alue ja $f : A \to \mathbb{C}$ analyyttinen kuvaus. Jos on olemassa alueen A piste z_0 siten, että funktio $|f|$ saa pisteessä z_0 lokaalin maksimin, niin f on vakiofunktio koko alueessa A.

Maksimiperiaatteen heikon muodon avulla saadaan

8.23. **Maksimiperiaatteen vahva muoto.** Olkoot A kompleksitason $\mathbb{C}$ rajoitettu alue ja $f : \overline{A} \to \mathbb{C}$ jatkuva kuvaus, joka on analyyttinen alueessa A. Tällöin

$$|f(z)| \le \sup_{z \in \partial A} |f(z)|\,.$$

Jos edellä olevassa epäyhtälössä on yhtäsuuruus jollakin alueen A pisteellä, niin funktio f on vakiofunktio.

Maksimiperiaatteen sovelluksena saamme

8.24. **Schwarzin lemma.** Olkoon $f : \mathbb{D}(0,1) \to \mathbb{C}$ analyyttinen kuvaus, jolle pätee

$$f(0) = 0 \text{ ja } |f(z)| \le 1 \text{ kaikilla } z \in \mathbb{D}(0,1)\,.$$

Silloin

$$|f(z)| \le |z| \text{ kaikilla } z \in \mathbb{D}(0,1) \text{ ja } |f'(0)| \le 1\,.$$

Jos $|f'(0)| = 1$ tai jos on olemassa luku $z_0 \ne 0$ siten, että $|f(z_0)| = |z_0|$, niin funktio f on tason kierto eli $f(z) = z\exp(i\alpha)$ jollakin kiinteällä luvulla $\alpha \in \mathbb{R}$.

8.25. **Historiaa.** Hermann Amandus Schwarz (1843-1921). Hän aloitti kemian opinnot Berliinissä, mutta Weierstrass ja Ernst Eduard Kummer (1810-1893) vaikuttivat siihen, että hän alkoi opiskella matematiikkaa. Tunnettu Schwarzin epäyhtälö on nimetty Hermann Schwarzin mukaan, mutta sitä Epäyhtälöä sanotaan myös Cauchyn-Bynyakovskyn-Scahwarzin epäyhtälöksi. Schwarzin lemma yhdistetään Schwarziin. Nykyisen klassisen formuloinnin voitaisiin ehkä katsoa kuuluvan kuitenkin Constantin Caratheodorylle (1873-1950).