KOMPLEKSIANALYYSI I KURSSI
SYKSY 2015

RITVA HURRI-SYRJÄNEN

3. Kompleksinen derivointi

3.1. **Määritelmä.** Olkoon G kompleksitason $\mathbb{C}$ epätyhjä osajoukko. Olkoon z_0 joukon G sisäpiste. Funktio $f : G \to \mathbb{C}$ on **kompleksisesti derivoituva pisteessä** z_0, jos on olemassa raja-arvo

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}, \tag{3.1}$$

missä $z_0 + h \in G$.

3.2. *Huomautus.* Meillä on nyt kunta $(R^2, +, \cdot) = \mathbb{C}$ ja kunnan laskusäännöt, joten h on kompleksiluku ja jakolasku on mahdollinen.

Raja-arvoa (3.1) merkitään $f'(z_0)$ ja se on funktion f kompleksinen derivaatta pisteessä z_0.

3.3. *Huomautus.* Kompleksinen derivoituvuus pisteessä ei riitä rakentamaan mielenkiintoista teoriaa, vaan tarvitaan kompleksinen derivoituvuus pisteen avoimessa ympäristössä.

Funktio $f : G \to \mathbb{C}$ on **analyyttinen pisteessä** z_0, jos on olemassa avoin kiekko $\mathbb{D}(z_0, \delta) \subset G$ jollain $\delta > 0$ siten, että funktiolla f on kompleksinen derivaatta jokaisessa kiekon $\mathbb{D}(z_0, \delta)$ pisteessä. Olkoon A kompleksitason $\mathbb{C}$ avoin joukko. Funktio $f : A \to \mathbb{C}$ on **analyyttinen kompleksitason avoimessa joukossa** A, jos funktion f on analyyttinen jokaisessa joukon A pisteessä.

Funktio $f' : z \mapsto f'(z)$ on funktion f kompleksinen derivaatta. Funktion f' määrittelyjoukko on se kompleksilukujen joukko, jossa f on kompleksisesti derivoituva.

3.4. *Huomautus.* Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ kompleksinen derivoituvuus on paljon vahvempi ominaisuus kuin reaalinen differentioituvuus.

Date: 18092015.

3.5. **Esimerkki. 1.** Olkoon $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^2$. Kiinnitetään piste $z_0 \in \mathbb{C}$. Silloin

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(z_0+h)^2-(z_0)^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2z_0h+h^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}(2z_0+h) = 2z_0\,.\end{aligned}$$

Siis $f'(z) = 2z$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$.

2. Olkoon $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z$. Silloin

$$\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = \frac{z_0+h-z_0}{h} = 1$$

kaikilla $z_0 \in \mathbb{C}$. Siis $f'(z_0) = 1$ kaikilla $z_0 \in \mathbb{C}$.

3. Jokainen vakiofunktio on kompleksisesti derivoituva ja vakiofunktion derivaatta on nolla: Olkoon $f(z) = c \in \mathbb{C}$ kaikilla z. Silloin kaikilla z_0

$$\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = \frac{c-c}{h} = 0\,.$$

3.6. **Esimerkki.** Olkoon $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \bar{z}$. Olkoon piste $z_0 \in \mathbb{C}$ kiinnitetty. Valitaan kaksi eri lähestymissuuntaa pisteeseen z_0. Olkoon $n \in \mathbb{N}$.

Merkitään $z_0 = (x_0, y_0)$. Valitaan ensin $h = \frac{1}{n}$ eli $h = (\frac{1}{n}, 0)$. Silloin

$$\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = \frac{\overline{z_0+\frac{1}{n}}-\overline{z_0}}{\frac{1}{n}} = 1\,.$$

Valitaan sitten $h = \frac{i}{n}$ eli $h = (0, \frac{1}{n})$. Silloin

$$\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = \frac{\overline{z_0+\frac{i}{n}}-\overline{z_0}}{\frac{i}{n}} = \frac{-\frac{i}{n}}{\frac{i}{n}} = -1\,.$$

Siis funktio f ei ole kompleksisesti derivoituva missään kompleksitason pisteessä.

Toisaalta, kun $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x, -y)$; siis

$$f_1 : (x,y) \mapsto x\,,\, f_2 : (x,y) \mapsto -y\,.$$

Silloin komponenttifunktioiden tavalliset reaaliset osittaisderivaatat ovat

$$\begin{aligned}&\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) = 1 \text{ ja } \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = 0 \\ &\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = 0 \text{ ja } \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) = -1\,.\end{aligned}$$

Koska komponenttifunktioiden f_1 ja f_2 osittaisderivaatat ovat olemassa ja jatkuvia jokaisessa tason pisteessä (x, y), niin funktio f on reaalisesti differentioituva koko reaalitasossa.

Geometrinen esitys on karakterisaatiossa:
Olkoot A kompleksitason $\mathbb{C}$ epätyhjä avoin osajoukko, funktio f joukossa A määritelty kompleksiarvoinen funktio ja $z_0 \in A$.

3.7. **Lemma.** *Funktiolla f on pisteessä z_0 kompleksinen derivaatta $f'(z_0) = \alpha$, jos ja vain jos on olemassa esitys (eli on olemassa kehitelmä)*

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + \alpha h + h\epsilon_{f,z_0}(h)\,,$$

missä

$$\lim_{h\to 0} \epsilon_{f,z_0}(h) = 0\,.$$

3.8. *Huomautus.* Toinen merkintä on $\epsilon_{f,z_0}(\cdot) = \epsilon_f(\cdot, z_0)$.

3.9. *Huomautus.* Siis lähellä lukua z_0 eli luvun z_0 riittävän pienessä ystössä

$$\begin{aligned}
g(z_0 + h) &= f(z_0) + f'(z_0)(h)\\
g(w) &= f(z_0) + f'(z_0)(w - z_0)\\
g(w) &= f(z_0) - z_0 f'(z_0) + f'(z_0)w\\
g(w) &= \lambda \cdot w + \mu\,,
\end{aligned}$$

missä $\lambda = f'(z_0) \in \mathbb{C}$ ja $\mu = f(z_0) - z_0 \cdot f'(z_0) \in \mathbb{C}$. (Muistutus: Kahden kompleksiluvun tulo (tässä $\lambda \cdot w$) on kierto ja venytys/kutistus.) Funktiota f voidaan siis approksimoida pisteen z_0 lähellä lineaarisella kompleksikertoimisella polynomilla.

3.10. *Huomautus.* Funktio $f : A \to \mathbb{C}$, $A \subset \mathbb{C}$ avoin, on kompleksisesti derivoituva pisteessä $z_0 \in A$, jos

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) =: \frac{d}{dz} f(z_0)\,.$$

Jälkimmäinen merkintä $\frac{d}{dz} f(z_0)$ on Leibniz'in merkintä. Operaattori $\frac{d}{dz}$ operoi $w = f(z)$:lla, siis $\frac{d}{dz} w = f'(z)$.

3.11. **Korollaari.** *Olkoot A kompleksitason avoin osajoukko, $f : A \to \mathbb{C}$, $z_0 \in A$. Jos funktio f on kompleksisesti derivoituva pisteessä z_0 niin funktio f on jatkuva pisteessä z_0.*

Käänteinen ei päde: $f(z) = \overline{z}$ on jatkuva koko kompleksitasossa, mutta $f(z) = \overline{z}$ ei ole kompleksisesti derivoituva missään.

Useimmat kompleksisen derivoituvuuden seuraukset ovat erilaiset kuin reaalisen differentioituvuuden, mutta algebralliset derivoimissäännöt ovat samanlaiset. Myös niiden todistukset ovat samantapaiset sekä reaali- että kompleksisessa tapauksessa.

3.12. **Lause.** ***Summan, tulon ja osamäärän derivaatat -lause.*** *Olkoon G kompleksitason epätyhjä osajoukko. Olkoot $f : G \to \mathbb{C}$ ja $g : G \to \mathbb{C}$ kompleksisesti derivoituvia pisteessä $z_0 \in \operatorname{int} G$. Silloin*

(1) *funktio $f + g : G \to \mathbb{C}$ on kompleksisesti derivoituva pisteessä z_0 ja*

$$(f + g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)\,,$$

(2) *funktio $fg : G \to \mathbb{C}$ on kompleksisesti derivoituva pisteessä z_0 ja*

$$(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)\,.$$

(3) *Jos lisäksi $g(z_0) \neq 0$, niin funktio $\frac{f}{g} : G \to \mathbb{C}$ on määritelty jossain pisteen z_0 ympäristössä ja funktio $\frac{f}{g}$ on kompleksisesti derivoituva pisteessä z_0 ja*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{(g(z_0))^2}\,.$$

Todistus. Kun $|h|$ on riittävän pieni, niin

$$f(z_0 + h) - f(z_0) = f'(z_0)h + h\epsilon_{f,z_0}(h)$$

ja

$$g(z_0 + h) - g(z_0) = g'(z_0)h + h\epsilon_{g,z_0}(h)\,,$$

missä $\lim_{h\to 0} \epsilon_{f,z_0}(h) = 0$ ja $\lim_{h\to 0} \epsilon_{g,z_0}(h) = 0$. Summaamalla saamme

$$\begin{aligned}
&(f + g)(z_0 + h) = f(z_0 + h) + g(z_0 + h) \\
&= f(z_0) + g(z_0) + (f'(z_0) + g'(z_0))h + h\epsilon_{f+g,z_0}(h) \\
&= (f + g)(z_0) + (f'(z_0) + g'(z_0))h + h\epsilon_{f+g,z_0}(h)\,,
\end{aligned}$$

missä

$$\epsilon_{f+g,z_0}(h) = \epsilon_{f,z_0}(h) + \epsilon_{g,z_0}(h) \to 0\,,$$

kun $|h| \to 0$. Summaa koskeva väite on todistettu.

Tulokaavan todistus: Kerrotaan funktioiden f ja g kehitelmät keskenään, jolloin

$$\begin{aligned}
&(fg)(z_0+h) = f(z_0+h)g(z_0+h)\\
&= (fg)(z_0) + f(z_0)g'(z_0)h + f(z_0)h\epsilon_{g,z_0}(h)\\
&+ f'(z_0)g(z_0)h + f'(z_0)hg'(z_0)h + f'(z_0)hh\epsilon_{g,z_0}(h)\\
&+ g(z_0)h\epsilon_{f,z_0}(h) + g'(z_0)hh\epsilon_{f,z_0}(h) + h\epsilon_{g,z_0}(h)h\epsilon_{f,z_0}(h)\\
&= (fg)(z_0) + (f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0))h\\
&+ f'(z_0)hg'(z_0)h + (f(z_0) + f'(z_0)h)h\epsilon_{g,z_0}(h)\\
&+ (g(z_0) + g'(z_0)h)h\epsilon_{f,z_0}(h) + h\epsilon_{f,z_0}(h)h\epsilon_{g,z_0}(h)\,,
\end{aligned}$$

missä

$$\begin{aligned}
\epsilon_{fg,z_0}(h) &= hf'(z_0)g'(z_0) + (f(z_0) + f'(z_0)h)\epsilon_{g,z_0}(h)\\
&\quad + (g(z_0) + g'(z_0)h)\epsilon_{f,z_0}(h) + h\epsilon_{f,z_0}(h)\epsilon_{g,z_0}(h) \to 0\,,
\end{aligned}$$

kun $|h| \to 0$. Siis tuloa koskeva väite on todistettu.

Osamäärää koskevan väitteen todistus:

Riittää laskea $(\frac{1}{g})'(z_0)$. Kun $|h|$ on kyllin pieni, niin

$$\begin{aligned}
\frac{1}{g(z_0+h)} - \frac{1}{g(z_0)} &= \frac{g(z_0) - g(z_0+h)}{g(z_0+h)g(z_0)}\\
&= \frac{-g'(z_0)h - h\epsilon_{g,z_0}(h)}{g(z_0+h)g(z_0)}\\
&= -\frac{g'(z_0)h}{(g(z_0))^2} + \frac{g'(z_0)h}{(g(z_0))^2} + \frac{-g'(z_0)h - h\epsilon_{g,z_0}(h)}{g(z_0+h)g(z_0)}\,.
\end{aligned}$$

Asetamme

$$\epsilon_{1/g,z_0}(h) = \frac{-\epsilon_{g,z_0}(h)}{g(z_0+h)g(z_0)} + \frac{g'(z_0)}{g(z_0)}\left(\frac{1}{g(z_0)} - \frac{1}{g(z_0+h)}\right).$$

Koska $\epsilon_{g,z_0}(h) \to 0$, kun $h \to 0$, ja funktion g jatkuvuuden perusteella $g(z_0+h) \to g(z_0)$, kun $h \to 0$, saamme vaaditun kehitelmän

$$\frac{1}{g(z_0+h)} = \frac{1}{g(z_0)} - \frac{g'(z_0)}{(g'(z_0))^2} + h\epsilon_{1/g,z_0}(h)\,,$$

missä

$$\epsilon_{1/g,z_0}(h) \to 0\,,\ \text{kun } h \to 0\,.$$

□

3.13. **Lause.** ***Ketjusääntö.*** *Olkoot A ja B kompleksitason avoimia joukkoja. Olkoot funktiot $f : A \to \mathbb{C}$ ja $g : B \to \mathbb{C}$ analyyttisiä, ja* *oletetaan, että* $f(A) \subset B$ *. Silloin yhdistetty kuvaus* $g \circ f : A \to \mathbb{C}$ *on analyyttinen joukossa* A *ja*

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0)$$

kaikilla $z_0 \in A$ *.*

Todistus. Olkoon $z_0 \in A$. Koska joukot A ja B ovat avoimia ja f on jatkuva, niin on olemassa $\delta > 0$ siten, että $z_0 + h \in A$ ja $f(z_0 + h) \in B$, kunhan $|h| < \delta$. Funktioiden f ja g analyyttisyyden nojalla

$$f(z_0 + h) - f(z_0) = f'(z_0)h + h\epsilon_{f,z_0}(h) ,$$

kunhan $|h|$ on kyllin pieni, ja

$$g(w_0 + k) - g(w_0) = g'(w_0)k + k\epsilon_{g,w_0}(k) .$$

kaikilla $w_0 \in B$, kunhan myös $|k|$ on riittävän pieni. Valitaan $w_0 = f(z_0)$ ja $k = f(z_0 + h) - f(z_0)$. Nyt

$$\begin{aligned}
&(g \circ f)(z_0 + h) - (g \circ f)(z_0) = g(f(z_0 + h)) - g(f(z_0)) \\
&= g(w_0 + k) - g(w_0) = g'(w_0)k + k\epsilon_{g,w_0}(k) \\
&= g'(w_0)(f(z_0 + h) - f(z_0)) + (f(z_0 + h) - f(z_0))\epsilon_{g,w_0}(k) \\
&= g'(f(z_0))f'(z_0)h + g'(f(z_0))h\epsilon_{f,z_0}(h) \\
&+ (f'(z_0)h + h\epsilon_{f,z_0}(h))\epsilon_{g,f(z_0)}(f(z_0 + h) - f(z_0)) \\
&= g'(f(z_0))f'(z_0)h + h\epsilon_{g\circ f,z_0}(h) ,
\end{aligned}$$

missä

$$\begin{aligned}
&\epsilon_{g\circ f,z_0}(h) = g'(f(z_0))\epsilon_{f,z_0}(h) \\
&+ (f'(z_0) + \epsilon_{f,z_0}(h))\epsilon_{g,f(z_0)}(f(z_0 + h) - f(z_0)) \to 0 ,
\end{aligned}$$

kun $h \to 0$, funktion f jatkuvuuden perusteella. $\square$

3.14. **Seurauslauseita ja huomautuksia.** (1) Potenssifunktio $z \mapsto z^n$, $n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$, on analyyttinen koko kompleksitasossa ja sen derivaatta on nz^{n-1} .

(2) Kompleksikertoiminen n : *nnen* asteen polynomi $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $P(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$, missä $a_k \in \mathbb{C}$, $k = 0, 1, \cdots , n-1$, $a_n \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, eli

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k ,$$

on analyyttinen koko kompleksitasossa. Tällöin

$$P'(z) = \sum_{k=1}^{n} k a_k z^{k-1} .$$

(3) Olkoot P ja Q polynomeja. Silloin rationaalifunktio $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ on analyyttinen niissä kompleksitason pisteissä z_0, joissa $Q(z_0) \neq 0$.

(4) Koska $z \mapsto \bar{z}$ ei ole analyyttinen ja

$$\bar{z} = \frac{|z|^2}{z}, \text{ kun } z \neq 0,$$

niin funktio $f : z \mapsto |z|^2 = x^2 + y^2$ ei ole analyyttinen missään. Tosin f on kompleksisesti derivoituva origossa.

Toisaalta funktio $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ on reaalisesti differentioituva kaikkialla reaalitasossa.

3.15. **Lause.** ***Käänteiskuvauksen derivaatta.*** *Olkoon A kompleksitason avoin joukko. Olkoon funktiolla $f : A \to \mathbb{C}$ pisteessä $z \in A$ kompleksinen derivaatta $f'(z) \neq 0$. Olkoon funktiolla f pisteen $f(z) =: w$ jossakin ympäristössä U määritelty jatkuva käänteiskuvaus f^{-1}. Silloin käänteiskuvauksella f^{-1} on kompleksinen derivaatta pisteessä w ja*

$$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(z)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))}.$$

Todistus. Koska funktiolla f on kompleksinen derivaatta pisteessä z, niin

$$f(z + h) - f(z) = f'(z)h + h\epsilon_{f,z}(h),$$

missä $\lim_{h\to 0} \epsilon_{f,z}(h) = 0$.

Olkoon $|k|$ niin pieni, että $w + k \in U$. Tällöin jokaiselle sellaiselle $k \in \mathbb{C}$ on oma $h \in \mathbb{C}$ siten, että $f^{-1}(w + k) = z + h$. Koska f^{-1} on jatkuva ympäristössä U, niin

$$\lim_{k\to 0}(z + h) = \lim_{k\to 0} f^{-1}(w + k) = f^{-1}(w) = z,$$

siis $h \to 0$, kun $k \to 0$. Silloin

$$\begin{aligned}\frac{f^{-1}(w + k) - f^{-1}(w)}{k} &= \frac{z + h - z}{w + k - w} \\ &= \frac{h}{f(z + h) - f(z)} = \frac{h}{f'(z)h + h\epsilon_{f,z}(h)} \\ &= \frac{1}{f'(z) + \epsilon_{f,z}(h)} \to \frac{1}{f'(z)},\end{aligned}$$

kun $k \to 0$. □

3.1. **Cauchyn-Riemannin yhtälöt.** Olkoon $A \subset \mathbb{C}$ avoin ja $z_0 = x_0 + iy_0 \in A$, $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$. Olkoon $f : A \to \mathbb{C}$ kompleksisesti derivoituva pisteessä $z_0 \in A$. Silloin $f'(z_0)$ on olemassa ja on yksikäsitteinen. Siis erotusosamäärän raja-arvo on sama, vaikka luku $h \in \mathbb{C}$ lähestyy nollaa eri suunnista. Valitaan nyt kaksi eri lähestymissuuntaa:

Pisteessä (x_0, y_0) kompleksisesti derivoituvalle funktiolle $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$, missä $u, v : A \to \mathbb{R}$, saamme käyttäen osittaisderivaatan määritelmää

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{h\in\mathbb{R}, h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} \\ &= \lim_{h\in\mathbb{R}, h\to 0} \frac{f((x_0,y_0)+(h,0))-f(x_0,y_0)}{h} \\ &= \lim_{h\in\mathbb{R}, h\to 0} \frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h} \\ &= \lim_{h\in\mathbb{R}, h\to 0} \frac{u(x_0+h,y_0)-u(x_0,y_0)}{h} + i \lim_{h\in\mathbb{R}, h\to 0} \frac{v(x_0+h,y_0)-v(x_0,y_0)}{h} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{h\in\mathbb{R}, h\to 0} \frac{f(z_0+ih)-f(z_0)}{ih} \\ &= \lim_{h\in\mathbb{R}, h\to 0} \frac{f((x_0,y_0)+(0,h))-f(x_0,y_0)}{ih} \\ &= \lim_{h\in\mathbb{R}, h\to 0} \frac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{ih} \\ &= \lim_{h\in\mathbb{R}, h\to 0} \frac{u(x_0,y_0+h)-u(x_0,y_0)}{ih} + i \lim_{h\in\mathbb{R}, h\to 0} \frac{v(x_0,y_0+h)-v(x_0,y_0)}{ih} \\ &= \lim_{h\in\mathbb{R}, h\to 0} \left(-i\frac{u(x_0,y_0+h)-u(x_0,y_0)}{h}\right) + \lim_{h\in\mathbb{R}, h\to 0} \frac{v(x_0,y_0+h)-v(x_0,y_0)}{h} \\ &= -i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) \\ &= \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) \,. \end{aligned}$$

Koska kompleksinen derivaatta $f'(z_0)$ on yksikäsitteinen, yhtälöt

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) \end{cases} \tag{3.2}$$

seuraavat heti.
Lisäksi

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)\,.$$

Siis funktion f on kompleksinen derivoituvuus pisteessä z_0 implikoi reaalisten osittaisderivaattojen olemassaolon siinä pisteessä ja sen, että osittaisderivaatat toteuttavat yhtälöt (3.2), joita sanotaan Cauchyn-Riemannin yhtälöiksi.

Enemmänkin on totta:

3.16. **Lause.** ***Cauchyn–Riemannin yhtälöt.*** *Olkoon A kompleksitason avoin joukko. Olkoon $f : A \to \mathbb{C}$ funktio siten, että $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$, jossa u ja v ovat reaaliarvoiset komponenttifunktiot ja x ja y ovat reaalisia. Olkoon $z_0 = (x_0, y_0) \in A$. Silloin funktio f on kompleksisesti derivoituva pisteessä (x_0, y_0), jos ja vain jos f on reaalisesti differentioituva pisteessä $z_0 = (x_0, y_0)$ ja reaaliarvoisten komponenttifunktioiden osittaisderivaatat toteuttavat Cauchyn-Riemannin yhtälöt*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)\,. \end{cases}$$

Merkinnöistä Karakterisaatiolauseen todistuksessa.

$$\nabla u(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)\right)$$

on funktion u gradientti pisteessä (x_0, y_0) ja

$$(a|b) = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

on vektoreiden (a_1, a_2) ja (b_1, b_2) välinen sisätulo.

Todistus. Oletetaan, että f on reaalisesti differentioituva pisteessä $z \in A$ ja Cauchyn-Riemannin yhtälöt ovat voimassa. Olkoon $h = h_1 + ih_2$. Koska u ja v ovat reaalisesti differentioituvia pisteessä z, niin

$$\begin{aligned} u(z+h) - u(z) &= Du(z)h + |h|\epsilon_1(h) \\ &= (\nabla u(z)|h) + |h|\epsilon_1(h) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(z)h_1 + \frac{\partial u}{\partial y}(z)h_2 + |h|\epsilon_1(h) \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} v(z+h)-v(z) &= Dv(z)h+|h|\epsilon_2(h) \\ &= \frac{\partial v}{\partial x}(z)h_1+\frac{\partial v}{\partial y}(z)h_2+|h|\epsilon_2(h)\,, \end{aligned}$$

missä $\epsilon_k(h)\to 0$, kun $h\to 0$, ja $k=1\,,2$. Merkitään $\epsilon_1(h)+i\epsilon_2(h)=\epsilon(h)$. Koska Cauchyn-Riemannin yhtälöt ovat voimassa, niin

$$\begin{aligned} f(z+h)-f(z) &= \Big(u(z+h)-u(h)\Big)+i\Big(v(z+h)-v(z)\Big) \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}(z)h_1+\frac{\partial u}{\partial y}(z)h_2\right)+i\left(\frac{\partial v}{\partial x}(z)h_1+\frac{\partial v}{\partial y}(z)h_2\right)+|h|\epsilon_1(h)+|h|i\epsilon_2(h) \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}(z)h_1-\frac{\partial v}{\partial x}(z)h_2\right)+i\left(\frac{\partial v}{\partial x}(z)h_1+\frac{\partial u}{\partial x}(z)h_2\right)+|h|\epsilon(h) \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}(z)+i\frac{\partial v}{\partial x}(z)\right)(h_1+ih_2)+|h|\epsilon(h) \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}(z)+i\frac{\partial v}{\partial x}(z)\right)h+|h|\epsilon(h) \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}(z)+i\frac{\partial v}{\partial x}(z)\right)h+h\epsilon_0(h)\,, \end{aligned}$$

missä $\epsilon_0(h)=(|h|\epsilon(h))/h$, kun $h\neq 0$, ja $\epsilon_0(0)=0$, ja $\epsilon_0(h)\to 0$, kun $h\to 0$.

Siis f on kompleksisesti derivoituva pisteessä $z\in A$ ja

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}(z)+i\frac{\partial v}{\partial x}(z)\,. \tag{3.3}$$

Eli väitteen toinen suunta on todistettu.

Todistamme vielä toisen suunnan. Olkoon f kompleksisesti derivoituva pisteessä $z_0\in A$. Silloin on olemassa kehitelmä, kunhan $|h|$ on kyllin pieni,

$$f(z_0+h)=f(z_0)+\alpha h+h\epsilon(h)\,, \tag{3.4}$$

missä $\alpha=f'(z_0)$ ja $\lim_{h\to 0}\epsilon(h)=0$.

Merkitsemme $\alpha=\alpha_1+i\alpha_2$ ja $h=h_1+ih_2$. Silloin yhtälön (3.4) vasen puoli on

$$f(z_0+h)=u(x_0+h_1,y_0+h_2)+iv(x_0+h_1,y_o+h_2)$$

ja yhtälön (3.4) oikea puoli on

$$\begin{aligned}
&f(z_0) + \alpha h + h\epsilon(h) \\
&= u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0) + (\alpha_1 + i\alpha_2)(h_1 + ih_2) + (h_1 + ih_2)\epsilon(h_1 + ih_2) \\
&= u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0) + \alpha_1 h_1 - \alpha_2 h_2 + i(\alpha_1 h_2 + \alpha_2 h_1) \\
&+ \mathrm{Re}(h\epsilon(h)) + i\,\mathrm{Im}(h\epsilon(h))\,.
\end{aligned}$$

Siis yhtälön (3.4) perusteella

$$\begin{aligned}
u(x_0 + h_1, y_0 + h_2) &= u(x_0, y_0) + \alpha_1 h_1 - \alpha_2 h_2 + \mathrm{Re}(h\epsilon(h)) \\
&= u(x_0, y_0) + ((\alpha_1, -\alpha_2)|(h_1, h_2)) + \mathrm{Re}(h\epsilon(h))\,,
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
v(x_0 + h_1, y_0 + h_2) &= v(x_0, y_0) + \alpha_2 h_1 + \alpha_1 h_2 + \mathrm{Im}(h\epsilon(h)) \\
&= v(x_0, y_0) + ((\alpha_2, \alpha_1)|(h_1, h_2)) + \mathrm{Im}(h\epsilon(h))\,.
\end{aligned}$$

Olkoon $h \neq 0$. Silloin $\mathrm{Re}(h\epsilon(h)) = |h|(\mathrm{Re}(h\epsilon(h)))/|h|$ ja $\mathrm{Im}(h\epsilon(h)) = |h|(\mathrm{Im}(h\epsilon(h)))/|h|$. Merkitään $\epsilon_1(h) = \mathrm{Re}(h\epsilon(h))/|h|$ ja $\epsilon_2(h) = \mathrm{Im}(h\epsilon(h))/|h|$. Silloin $|\epsilon_j(h)| \leq |\epsilon(h)|\,, j = 1, 2$. Siis

$$u(x_0 + h_1, y_0 + h_2) = u(x_0, y_0) + ((\alpha_1, -\alpha_2)|(h_1, h_2)) + |h|\epsilon_1(h)\,,$$

ja

$$v(x_0 + h_1, y_0 + h_2) = v(x_0, y_0) + ((\alpha_2, \alpha_1)|(h_1, h_2)) + |h|\epsilon_2(h)\,,$$

missä $|\epsilon_j(h)| \to 0$, kun $h \to 0$, $j = 1, 2$. Siis funktiot $u : A \to \mathbb{R}$ ja $v : A \to \mathbb{R}$ ovat reaalisesti differentioituvia pisteessä (x_0, y_0) ja koska funktion u derivaatta on yksikäsitteinen pisteessä (x_0, y_0) ja koska funktion v derivaatta on yksikäsitteinen pisteessä (x_0, y_0), niin

$$\begin{cases}
\alpha_1 = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) \text{ ja } -\alpha_2 = \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)\,, \\
\alpha_2 = \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \text{ ja } \alpha_1 = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)\,.
\end{cases}$$

Siis f on reaalisesti differentioituva pisteessä (x_0, y_0) ja Cauchyn-Riemannin yhtälöt ovat voimassa. □

Seurauksena saamme tuloksen analyyttisille funktioille.

3.17. **Lause.** *Okoon A kompleksitason avoin joukko. Olkoon $f : A \to \mathbb{C}$, $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$, jossa u ja v ovat reaaliarvoiset komponenttifunktiot, $x \in \mathbb{R}$ ja $y \in \mathbb{R}$. Funktio f on analyyttinen joukossa A, jos ja vain jos funktiot u ja v ovat reaalisesti differentioituvia joukossa A ja toteuttavat Cauchyn-Riemannin yhtälöt.*

3.18. **Esimerkki.** Milloin seuraavat funktiot ovat kompleksisesti derivoituvia? Missä ne ovat analyyttisiä?

$$(1) \quad f(z) = \operatorname{Im}(z)$$
$$(2) \quad f(z) = z \operatorname{Im}(z)$$
$$(3) \quad f(x+iy) = x^2 + iy^2 \,.$$

3.19. **Esimerkki.** (1) Olkoon $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(x,y) = x^2 - y^2 + i2xy$. Funktio f on analyyttinen koko kompleksitasossa: Merkitsemme $u(x,y) = x^2 - y^2$ ja $v(x,y) = 2xy$. Funktiot u ja v ovat reaalisesti differentioituvia koko tasossa ja Cauchyn-Riemannin yhtälöt ovat voimassa.
(1) Olkoon $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$,

$$f(z) = \frac{z}{1+|z|} \,.$$

Funktio f ei ole kompleksisesti derivoituva pisteessä $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, koska Cauchyn-Riemannin yhtälöt eivät ole voimassa silloin.
(2) Funtiota vastaavien Cauchyn-Riemannin yhtälöiden voimassaolo pisteessä z_0 ei yksinään riitä siihen, että funktio olisi derivoituva pisteessä z_0. Esimerkiksi: Olkoon $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ määritelty siten, että luvulle $z = x + iy$, $x \in \mathbb{R}$ ja $y \in \mathbb{R}$,

$$f(z) = \begin{cases} \frac{xy^2(x+iy)}{x^2+y^4} & \text{kun } z \neq 0 \,, \\ 0 & \text{kun } z = 0 \,. \end{cases} \tag{3.5}$$

Tällöin Cauchyn-Riemannin yhtälöt ovat voimassa origossa, mutta $f'(0)$ ei ole olemassa. Ongelmana on, että Cauchyn -Riemannin yhtälöt eivät kuitenkaan ole voimassa punkteeratussa origokeskisessä avoimessa kiekossa.

3.20. *Huomautus.* Jos $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ on reaalisesti differentioituva kuvaus siten, että $f(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$, niin funktion f Jacobin determinantti pisteessä (x_0, y_0) on

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} u(x_0,y_0) & \frac{\partial}{\partial y} u(x_0,y_0) \\ \frac{\partial}{\partial x} v(x_0,y_0) & \frac{\partial}{\partial y} v(x_0,y_0) \end{pmatrix} .$$

Siis analyyttisen funktion f Jacobin determinantti pisteessä z_0 on $|f'(z_0)|^2$.

3.21. *Huomautus.* Määrittelemme, että avoimessa joukossa määritelty funktio on lokaalisti vakio, jos funktio on vakio jokaisen pisteen jossain avoimessa ympäristössä. Itse asiassa lokaalisti vakio funktio on vakio jokaisessa määrittelyjoukkonsa yhtenäisessä komponentissa.

3.22. **Korollaari.** *Jos funktio $f : A \to \mathbb{R}$ on analyyttinen reaaliarvoinen funktio kompleksitason avoimessa joukossa A, niin funktio f on lokaalisti vakio.*

Todistus. Olkoon $a \in A$. Koska f on analyyttinen avoimessa joukossa A, niin on olemassa $\delta > 0$ siten, että f on kompleksisesti derivoituva jokaisessa kiekon $\mathbb{D}(a,\delta) \subset A$ pisteessä (x_0, y_0). Siis

$$\frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0\,.$$

Cauchyn-Riemannin yhtälöiden nojalla myös

$$\frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0\,.$$

Siis f on lokaalisti vakio. □

3.23. *Huomautus.* Määritellään Laplace-operaattori

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\,.$$

Olkoon A tason avoin joukko. Kahdesti jatkuvasti differentioituva kuvaus $f : A \to \mathbb{R}$ on harmoninen, jos

$$\Delta f(x,y) = 0\,,$$

kaikilla $(x,y) \in A$.

3.24. **Lause.** *Analyyttisen funktion reaaliosa ja imaginääriosa ovat harmonisia funktioita.*

Todistus. Jos funktio on analyyttinen, niin funktio on kaksi kertaa jatkuvasti derivoituva. Osoitamme tämän myöhemmin. (Paljon enemmänkin on totta, palaamme tähän Luvussa 8.) Cauchyn-Riemannin yhtälöiden nojalla

$$\begin{aligned}
\Delta \operatorname{Re} f &= \frac{\partial^2 \operatorname{Re} f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \operatorname{Re} f}{\partial y^2} \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial y} \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial x} = 0\,.
\end{aligned}$$

Siis $\Delta Ref = 0$. Vastaavasti $\Delta Imf = 0$. □

3.25. **Lause.** *Jos u on harmoninen kiekossa $\mathbb{D}(z_0, r)$, niin löytyy kiekossa analyyttinen funktio f, jolle* $\operatorname{Re} f = u$.

3.26. *Huomautus.* Lokaalisti harmoniset funktiot ovat täsmälleen analyyttisten funktioiden reaali- ja imaginääriosat.

3.27. *Huomautus.* Eri tapoja osoittaa, että f ei ole kompleksisesti derivoituva:
(1) Jos f on epäjatkuva pisteessä z_0, niin f ei ole kompleksisesti derivoituva pisteessä z_0.
(2) Osoittaaksesi, että f ei ole kompleksisesti derivoituva pisteessä z_0, osoita, että $\nexists$ raja-arvoa erotusosamäärälle

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,.$$

(3) Osoittaaksesi, että $f(x,y)=u(x,y)+iv(x,y)$ ei ole kompleksisesti derivoituva pisteessä $z_0=x_0+iy_0$, niin osoita, että $f(x,y)=(u(x,y),v(x,y))$ ei ole reaalisesti differentioituva pisteessä (x_0,y_0).
(4) Olkoon $f(x,y)=u(x,y)+iv(x,y)$, jossa u ja v ovat reaaliarvoiset komponenttifunktiot, $x\in\mathbb{R}$ ja $y\in\mathbb{R}$. Jos

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)\neq\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)\ \textit{tai}\ \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)\neq-\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)\,,$$

niin f ei ole kompleksisesti derivoituva pisteessä z_0.
(5) Summan, tulon ja osamäärän hyödyntäminen.
(6) Voit käyttää tietoa, että analyyttisen funktion komponenttifunktiot ovat harmonisia.

3.2. **Lineaarikuvauksista.** Derivoituvuus liittyy lineaariseen approksimointiin, joten kertaamme lineaarifunktion käsitteen.

Olkoon V vektoriavaruus ja $\mathcal{K}$ sen kerroinkunta. Funktio $L:V\to V$ on $\mathcal{K}$-lineaarinen, jos

(1) $L(x+y)=Lx+Ly$ kaikilla $x,y\in V$
(2) $L(\lambda x)=\lambda Lx$ kaikilla $\lambda\in\mathcal{K}$ ja $x\in V$.

3.28. **Lause.** *Olkoon $L:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ funktio, joka on $\mathbb{R}$-lineaarinen. Silloin $L(z)=az+b\bar{z}$ kaikilla $z\in\mathbb{C}$, missä*

$$a=\frac{1}{2}(L(1)-iL(i))\ \textit{ja}\ b=\frac{1}{2}(L(1)+iL(i))\,.$$

Todistus. Olkoon $z=x+iy$, missä $x\in\mathbb{R}$ ja $y\in\mathbb{R}$. Silloin $\mathbb{R}$-lineaarisen kuvauksen määritelmän nojalla ja kompleksiluvun reaaliosan ja imaginääriosan ominaisuuksien nojalla

$$\begin{aligned}L(x+iy)&=xL(1)+yL(i)\\&=\frac{z+\overline{z}}{2}L(1)+\frac{z-\overline{z}}{2i}L(i)\\&=z\frac{1}{2}(L(1)-iL(i))+\overline{z}\frac{1}{2}(L(1)+iL(i))=:az+b\overline{z}\,.\end{aligned}$$

□

Vastaavasti kirjoittamalla $z = 1 \cdot z$ saadaan suoraan

3.29. **Lause.** *Jokainen $\mathbb{C}$-lineaarinen kuvaus $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ on muotoa $L(z) = az$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$, missä $a = L(1)$ on kompleksinen vakio.*

3.30. **Lause.** *Funktio $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ funktio, joka on $\mathbb{R}$-lineaarinen, on $\mathbb{C}$-lineaarinen, jos ja vain jos $L(iz) = iL(z)$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$.*

Todistus. Suoraan $\mathbb{C}$-lineaarisuus implikoi, että $L(iz) = iL(z)$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$.

Toisaalta $\mathbb{R}$-lineaariselle kuvaukselle

$$L(iz) = a(iz) + b\overline{iz} = i(az - b\overline{z}).$$

Siis

$$L(iz) = iL(z), \text{ joss } i(az - b\overline{z}) = i(az + b\overline{z}),$$

eli

$$L(iz) = iL(z), \text{ joss } iaz - ib\overline{z} = iaz + ib\overline{z}.$$

Siis, jos

$$L(iz) = iL(z) \text{ kaikilla } z \in \mathbb{C},$$

niin $b = 0$ ja L on $\mathbb{C}$-lineaarinen. □

Kerrataan vielä reaalisesta differentioituvuudesta seuraava:

Funktio $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ on reaalisesti differentioituva pisteessä z_0, jos funktiolla f on kehitelmä

$$f(z_0 + h) - f(z_0) = L_{f,z_0}(h) + |h|\epsilon_{f,z_0}(h),$$

missä kuvaus $L_{f,z_0} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ on $\mathbb{R}$-lineaarinen ja $\lim_{h\to 0} \epsilon_{f,z_0}(h) = 0$. Ko. ehdon täyttävää $\mathbb{R}$-lineaarikuvausta sanotaan funktion f derivaataksi pisteessä z_0 ja merkitään $Df(z_0)$.

Toisaalta, jos f on reaalisesti differentioituva pisteessä z_0, edellä oleva kehitelmä on voimassa.

Funktiolla f on kompleksinen derivaatta pisteessä z_0 täsmälleen silloin, kun kuvaus L_{f,z_0} ei ole vain $\mathbb{R}$-lineaarinen vaan on myös $\mathbb{C}$-lineaarinen.

Olkoot $a = a_1 + ia_2$ ja $b = b_1 + ib_2$ ja myös $z = x + iy$ ja $w = u + iw$. Oletetaan $a_k, b_k, x, y, u, v \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2$.

Koska $\mathbb{R}$-lineaariselle funktiolle $w = az + b\overline{z}$ saadaan,

$$\begin{aligned} w = az + b\overline{z} &= (a_1 + ia_2)(x + iy) + (b_1 + ib_2)(x - iy) \\ &= (a_1x - a_2y + b_1x + b_2y) + i(a_1y + a_2x - b_1y + b_2x) \\ &= (a_1 + b_1)x - (a_2 - b_2)y + i((a_2 + b_2)x + (a_1 - b_1)y), \end{aligned}$$

niin $\mathbb{R}$-lineaarinen kuvaus $w = az + b\overline{z}$ voidaan esittää kahtena reaalisena yhtälönä

$$u = (a_1 + b_1)x - (a_2 - b_2)y, v = (a_2 + b_2)x - (a_1 - b_1)y.$$

Siis geometrisesti $\mathbb{R}$-lineaarinen kuvaus on tason affiini kuvaus $y = Ax$, jonka matriisi A on

$$\begin{pmatrix} a_1 + b_1 & -(a_2 - b_2) \\ a_2 + b_2 & a_1 - b_1\,. \end{pmatrix}$$

Jakobiaani on siis

$$J = a_1^2 - b_1^2 + a_2^2 - b_2^2 = |a|^2 - |b|^2\,.$$

Tämä kuvaus on ei-singulaarinen, jos $|a| \neq |b|$. Se säilyttää suunnistuksen, jos $|a| > |b|$, ja vaihtaa suunnistuksen, jos $|a| < |b|$. Kuvaus kuvaa suorat suoriksi, yhdensuuntaiset suorat yhdensuuntaisiksi suoriksi ja neliöt vinoneliöiksi.

Mutta $\mathbb{C}$-lineaarinen kuvaus ei muuta suunnistusta, sillä sitä vastaava Jakobi on $J = |a|^2 \geq 0$. Lisäksi $\mathbb{C}$-lineaarinen kuvaus ei ole singulaarinen, ellei $a = 0$. Kun merkitsemme

$$a = |a|\ (\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

ja muistamme kompleksilukujen kertomisen geometrisen merkityksen, niin $\mathbb{C}$-lineaarinen, ei-degeneroitunut, kuvaus

$$w = |a|(\cos\alpha + i\sin\alpha)z$$

on kiertokulman α verran yhdistettynä venytykseen tai kutistukseen $|a|$ verran. Tällaiset kuvaukset säilyttävät kulmat ja kuvaavat neliöt neliöiksi. Palaamme näihin kuvauksiin myöhemmin.

3.31. **Historiaa.** Léonard Euler (1707–1783) oli ilmeisestikin ensimmäinen matemaatikko, joka systemaattisesti tutki kompleksimuuttujan funktioita ja niiden sovelluksia analyysissä, hydrodynamiikassa ja karttateoriassa. Jean D'Alembertin (1717–1783) ja Eulerin nimi voitaisiin myös liittää nykyisin Cauchyn-Riemannin yhtälöihin kutsuttuihin osittaisdifferentiaaliyhtälöihin, koska he tutkivat vastaavia asioita jo 1700-luvulla. Kompleksisen derivoituvuuden kehittäjinä pidetään kuitenkin lähinnä matemaatikkoja Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) ja Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866).