KOMPLEKSIANALYYSI I KURSSI
SYKSY 2014

RITVA HURRI-SYRJÄNEN

11. Konformikuvauksista

1. Möbius-kuvauksista

11.1. **Johdantoa.** Seuraavassa α ja β ovat annettuja kompleksilukuja ja k ja t_0 ovat reaalisia vakioita.

Siirto (Translation)$w = z + \beta$
Tässä kuvauksessa z-tason kuvat on siirretty vektorin β verran w-tasossa.
Kierto (Rotation) $w = (\exp(it_0))z$
Tässä kuvauksessa z-tason kuvat kierretään kulman t_0 verran origon ympäri w-tasossa. Jos $t_0 > 0$, niin kierto on positiiviseen kiertosuuntaan. Jos $t_0 < 0$, niin kierto on negatiiviseen kiertosuuntaan.

11.1. **Esimerkki.** (a) $z \mapsto (\exp(i(-\pi/2)))z = -iz$ eli kierto kellon kiertosuuntaan kulman $\pi/2$ verran.
(b) $z \mapsto (\exp(i(-\pi)))z = -z$ eli kierto kellon kiertosuuntaan kulman π verran.

Venytys (Stretching) $w = kz$
Tässä kuvauksessa z-tason kuvat venytetään suuntaan z, jos $k > 1$. Jos $0 < k < 1$, niin z-tason kuvat kutistetaan suuntaan z.

11.2. **Esimerkki.** (a) $f(z) = 2iz = 2(\exp(i\pi/2))z$ eli venytys luvulla 2 ja kierto positiiviseen kiertosuuntaan kulman $\pi/2$ verran.
(b) $f(z) = (1+i)z - i = \sqrt{2}(\exp(i\pi/4))z - i$ eli venytys luvulla $\sqrt{2}$, kierto positiiviseen kiertosuuntaan kulman $\pi/4$ verran ja sitten "alaspäin" siirto vektorilla i.

Inversio (Inversion) $w = 1/z$
Huomaa: $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.
Polaarikoordinaattiesitys on myös havainnollinen: jos $z = r\exp(it)$, $f(z) = 1/(r\exp(it)) = r^{-1}\exp(-it)$. Siis $|f(z)| = |z|^{-1}$ eli luvun $f(z)$

Date: 28112014.

moduli on luvun z modulin käänteisluku, ja luvun $f(z)$ argumentti on luvun z argumentti varustettuna negatiivisella merkillä.
Siis kun annetaan luvun z lähestya origoa, niin luku $f(z)$ etääntyy origosta, ja kun kierretään lukua z positiiviseen kiertosuuntaan, niin $f(z)$ kulkee negatiiviseen kiertosuuntaan.

11.2. **Möbius-kuvauksista.** Möbius-kuvaus on kuvaus, joka on muotoa

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}\,,$$

missä $a\,,b\,,c\,,d$ ovat kompleksilukuja, joille $ad-bc \neq 0$. Jälkimmäinen ehto estää seuraavanlaiset tilanteet

$$f(z) = \frac{5z+30}{z+6} = 5\,.$$

Siis ehto estää sen, että $az+b$ olisi luvun $cz+d$ monikerta, eli ehdolla $ad-bc \neq 0$ funktio f ei surkastu vakiofunktioksi.

Möbius-kuvaukset on määritelty kaikkialla paitsi, kun $z = -d/c$.
Möbius-kuvaukset voidaan määritellä laajennetussa kompleksitasossa:
Jos $c \neq 0$, niin määritellään $f(\infty) = a/c$ ja $f(-d/c) = \infty$.
Jos $c = 0$, niin määritellään $f(\infty) = \infty$.
Esimerkki Kuvaus $f(z) = \frac{z+i}{7z+i}$ antaa luvun $\frac{1}{7}$, kun $z = \infty$.

Remark Möbius transformations are also known as the bilinear transformations or the fractional linear transformations or the linear fractional transformations.

Huomautus

(1) Möbius-kuvaus on analyyttinen, kunhan $z \neq -d/c$, jos $c \neq 0$. Jos $c = 0$, niin $f(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$ ja on siis koko kompleksitasossa analyyttinen.

(2) Möbius-kuvaus on meromorfinen koko laajennetussa kompleksitasossa $\overline{\mathbb{C}}$.

(3) Erityisesti Möbius-kuvaus on jatkuva $\overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$.

Pistettä $-d/c$ sanotaan singulariteetiksi tai Möbius-kuvauksen navaksi (pole).
Esimerkki Kuvauksella $f(z) = \frac{z+i}{z-i}$ on singulariteetti pisteessä $z = i$.

Siirto, venytys, kierto ja inversio ovat erikoistapauksia Möbius-kuvauksista. Siirrossa, kierrossa ja venytyksessä äärettömyyspiste pysyy paikallaan, mutta inversio vaihtaa origon ja äärettömyyspisteen.
Esimerkki Siirtokuvaus $f(z) = z + 2 - i$ voidaan kirjoittaa

$$f(z) = \frac{z + 2 - i}{0z + 1}\,.$$

Esimerkki Kuvauksen $f(z) = \frac{z+i}{z-i} = 1 + \frac{2i}{z-i}$ muodostuminen:

$$\begin{aligned} z &\mapsto z - i \\ z - i &\mapsto \frac{1}{z-i} \\ \frac{1}{z-i} &\mapsto \frac{2i}{z-i} \\ \frac{2i}{z-i} &\mapsto 1 + \frac{2i}{z-i}\,. \end{aligned}$$

Siis siirto, inversio, venytys ja kierto, siirto.

11.3. *Huomautus.* Jos f on Möbius-kuvaus, niin se on yhdistetty kuvaus siirrosta, kierrosta, venytyksestä ja inversiosta. Jokin näistä kuvauksista voi tietysti puuttua yhdistettyä kuvausta muodostettaessa.
Perustelu:
1. Olkoon $c = 0$. Silloin

$$f(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$$

eli $f_2 \circ f_1 = f$, kun

$$f_1(z) = \frac{a}{d}z \text{ ja } f_2(z) = z + \frac{b}{d}\,.$$

2. Olkoon $c \neq 0$. Valitaan

$$\begin{aligned} f_1(z) &= z + \frac{d}{c} \\ f_2(z) &= \frac{1}{z} \\ f_3(z) &= \frac{bc - ad}{c^2}z \\ f_4(z) &= z + \frac{a}{c}\,, \end{aligned}$$

jolloin $f = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$ eli

$$f(z) = \frac{bc - ad}{c^2}\frac{1}{z + \frac{d}{c}} + \frac{a}{c}\,.$$

Möbius-kuvauksen ominaisuuksia

(1) Jos $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ on Möbius-kuvaus, niin kuvaus
$$g(z) = \frac{dz-b}{-cz+a}$$
on funktion f käänteiskuvaus, sillä
$$(f \circ g)(z) = f(g(z)) = z = g(f(z)) = (g \circ f)(z)\,.$$
Siis $g = f^{-1}$.

(2) Möbius-kuvauksen käänteiskuvaus on myös Möbius-kuvaus.

(3) Jos f ja g ovat Möbius-kuvauksia, niin niiden yhdistetty kuvaus on myös Möbius-kuvaus.

(4) Siis Möbius-kuvaukset muodostavat ryhmän $(\mathcal{M}, \circ)$, kun laskuoperaationa $\circ$ on funktioiden yhdistäminen. Neutraalialkio on kuvaus $z \mapsto z$. Tämä ryhmä ei ole kuitenkaan kommutatiivinen (vaihdannainen); nimittäin on olemassa Möbius-kuvaukset f ja g siten, että $f \circ g \neq g \circ f$.

(5) Möbius-kuvaus säilyttää kulmat; tästä enemmän myöhemmin.

11.4. *Huomautus.* Funktiolle
$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$
kertoimet a , b , c , d eivät ole yksikäsitteiset: jos $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, niin
$$f(z) = \frac{(\lambda a)z + (\lambda b)}{(\lambda c)z + (\lambda d)}\,.$$
Möbius-kuvaus
$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$
ja kompleksinen (2×2)-matriisi
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
vastaavat toisiaan siten, että kaikki matriisit
$$\begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}\,,$$
missä $\lambda^2(ad-bc) \neq 0$ vastaavat samaa Möbius-kuvausta
$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}\,.$$

Kaksoissuhteesta
Jos haluaa kuvata kolme erllistä pistettä $z_1\,, z_2\,, z_3$ kolmeksi keskenään erilliseksi pisteeksi $w_1\,, w_2\,, w_3$, niin tämä saadaan tehtyä Möbiuskuvauksella. On olemassa sopiva kaava Möbiuskuvaukselle: Olkoon

$$w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}\,.$$

Valitaan ensin piste $z_2 \in \overline{\mathbb{C}}$. Silloin

$$w_2 = f(z_2) = \frac{az_2+b}{cz_2+d}\,.$$

Nyt

$$w - w_2 = \frac{az+b}{cz+d} - \frac{az_2+b}{cz_2+d} = \frac{(ad-bc)(z-z_2)}{(cz_2+d)(cz+d)}\,.$$

Valitaan sitten $z_3 \neq z_2$ ja $f(z_3) = w_3$. Nyt

$$w - w_3 = \frac{az+b}{cz+d} - \frac{az_3+b}{cz_3+d} = \frac{(ad-bc)(z-z_3)}{(cz_3+d)(cz+d)}\,.$$

Jaetaan saadut yhtälöt

$$(1) \qquad \frac{w-w_2}{w-w_3} = \lambda\frac{z-z_2}{z-z_3}\,, \text{ missä } \lambda = \frac{cz_3+d}{cz_2+d}\,.$$

Luku λ ei siis riipu luvusta z. Valitaan vielä z_4 ja $w_4 = f(z_4)$, missä $z_4 \neq z_3$ ja $z_4 \neq z_2$. Kun edellä merkkaamme $z = z_4$ ja $w = w_4$, saamme

$$\frac{w_4-w_2}{w_4-w_3} = \lambda\frac{z_4-z_2}{z_4-z_3}$$

eli

$$(2) \qquad \frac{w_2-w_4}{w_3-w_4} = \lambda\frac{z_2-z_4}{z_3-z_4}\,.$$

Nyt yhtälöistä (1) ja (2) saamme

$$\frac{(w-w_2)(w_3-w_4)}{(w-w_3)(w_2-w_4)} = \frac{(z-z_2)(z_3-z_4)}{(z-z_3)(z_2-z_4)}\,.$$

Otetaan seuraava merkintä käyttöön

11.5. **Määritelmä. Kaksoissuhde; Cross Ratio** Kompleksilukujen $a_1\,, a_2\,, a_3\,, a_4$, joille $a_k \neq a_j$ aina kun $k \neq j$, kaksoissuhde on luku

$$[a_1, a_2, a_3, a_4] = \frac{(a_1-a_2)(a_3-a_4)}{(a_1-a_3)(a_2-a_4)}\,.$$

Jos kaksoissuhteessa jokin $a_k = \infty$, niin kaksoisuhde määritellään raja-arvona, kun $a_k \to \infty$.

Kaksoissuhde säilyy Möbiuskuvauksessa $w = f(z)$ eli kaksoissuhde on Möbius-invariantti:

$$[w, w_2, w_3, w_4] = [z, z_2, z_3, z_4]\,.$$

11.6. **Lause.** *Olkoot z_2 , z_3 , z_4 kolme erillistä pistettä laajennetussa kompleksitasossa ja olkoot w_2 , w_3 , w_4 kolme keskenään erillistä pistettä laajennetussa kompleksitasossa. Silloin on olemassa yksikäsitteinen Möbius-kuvaus h siten, että $h(z_2) = w_2$, $h(z_3) = w_3$, $h(z_4) = w_4$ ja h saadaan yhtälön*

$$[w, w_2, w_3, w_4] = [z, z_2, z_3, z_4]$$

ratkaisuna, kun $w = h(z)$, $z \in \overline{\mathbb{C}}$.

Muistutus Luvussa 12 sovimme (Riemannin pallon eli Gaussin pallon yhteydessä), että lisätään suoraan äärettömyyspiste, kun työskentelemme laajennetussa kompleksitasossa. Tällöin suora kuuluu laajennettuun kompleksitasoon.

11.7. **Lause.** *Möbius-kuvaus kuvaa ympyrän joko suoralle tai ympyrälle. Möbius-kuvaus kuvaa suoran joko suoralle tai ympyrälle.*

11.8. **Esimerkki.** Olkoon

$$f(z) = \frac{z+i}{z-i}\,.$$

Kuvaus f kuvaa pisteet $-i\,,i\,,1$ seuraavasti: $f(-i) = 0\,,\ f(i) = \infty\,,$ $f(1) = i$. Lähtöpisteet $-i\,,i\,,1$ määräävät yksikkökiekon kehän. Kuvapisteet $0\,,\infty\,,i$ määräävät suoran, koska ääretön on mukana; ja suora on nyt imaginääriakseli (ja siihen lisätty piste ääretön). Siis kuvaus f kuvaa yksikkökiekon kehän imaginääriakseliksi.

11.9. *Huomautus.* Koska laajennetun kompleksitason suora voidaan ajatella ympyräksi, jolla on ääretön säde ja keskipiste äärettömän kaukana origosta, niin joskus puhutaan yleistetyistä ympyröistä eli suorista ja tavallisista ympyröistä. Edellinen lause formuloidaan silloin, että Möbius-kuvaus kuvaa yleistetyt ympyrät yleistetyille ympyröille.

Jokainen suora L jakaa kompleksitason $\mathbb{C}$ kahteen erilliseen osaan, joita sanomme puolitasoiksi, merkitsemme $\mathbb{H}_1$ ja $\mathbb{H}_2$. Sovimme, että $\infty \in L$. Silloin suoran L komplementti laajennetussa kompleksitasossa on myös kahden erillisen alueen yhdiste. Jos Möbius-kuvauksessa f suora L kuvautuu ympyrälle, ympyrän komplementti koostuu joukoista $f(\mathbb{H}_1)$ ja $f(\mathbb{H}_2)$, koska f on bijektio laajennetulta kompleksitasolta laajennetulle kompleksitasolle. Koska f on jatkuva laajennetulta kompleksitasolta laajennetulle kompleksitasolle, ja jatkuva kuvaus kuvaa yhtenäisen joukon yhtenäiseksi joukoksi, niin f kuvaa ympyrän rajoittaman kiekon

jommaksi kummaksi joukoista $\mathbb{H}_1$, $\mathbb{H}_2$. Suljetun kiekon ulkopuolen f kuvaa jäljelle jääväksi joukoista $\mathbb{H}_1$, $\mathbb{H}_2$.
Edelleen koska Möbius-kuvaus on homeomorfismi (eli jatkuva bijektio, jonka käänteiskuvaus on jatkuva) ja jatkuva kuvaus kuvaa yhtenäisen joukon yhtenäiseksi joukoksi, niin saamme edellä olevasta

11.10. **Korollaari.** *Möbius-kuvaus kuvaa jokaisen alueen, joka on joko kiekko $\mathbb{D}(z_0, r)$ tai suljetun kiekon komplementti laajennetusta kompleksitasossa $\mathbb{C}_\infty \setminus \overline{\mathbb{D}}(z_0, r)$ tai jonkin suoran määräämä puolitaso laajennetussa kompleksitasossa, alueelle, joka on joko kiekko tai suljetun kiekon komplementti laajennetussa kompleksitasossa tai jonkin suoran määräämä puolitaso laajennetussa kompleksitasossa.*

11.11. **Esimerkki.** Määrätään nyt origokeskisen yksikköympyrän kuva Möbius-kuvauksessa

$$f(z) = \frac{z + i}{iz + 1} .$$

Edellä olevan nojalla tiedämme, että kuva on suora tai ympyrä. Otamme ympyrän kolme pistettä ja katsomme, minne ne kuvautuvat: $f(1) = 1$, $f(-1) = -1$, ja $f(i) = \infty$. koska kuvapisteiden joukossa on äärettömyyspiste, niin kuva on suora. Koska kaksi kuvapisteistä on -1 ja 1 , niin yksikköympyrän kuva on reaaliakseli.

Määrätään origokeskisen yksikkökiekon kuva tässä kuvauksessa:
Edellä olevan korollaarin nojalla avoin yksikkökiekko $\mathbb{D}(0, 1)$ kuvautuu joko ylemmäksi puolitasoksi $\mathbb{H}_+ = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ tai alemmaksi puolitasoksi $\mathbb{H}_- = \{z : \operatorname{Im} z < 0\}$. Koska $f(0) = i \in \mathbb{H}_+$, niin origokeskinen avoin kiekko kuvautuu ylemmäksi puolitasoksi.

11.12. **Esimerkki.** Olkoon

$$f(z) = \frac{z - 1}{z - 3} .$$

Määrätään origokeskisen yksikkökiekon kuva:
Ensinnäkin $f(1) = 0$, $f(i) = \frac{2}{5} - \frac{i}{5}$, $f(-1) = \frac{1}{2}$.
Siis f kuvaa yksikköympyrän ympyrälle, joka kulkee pisteiden 0 , $\frac{2}{5} - \frac{i}{5}$, $\frac{1}{2}$ kautta .
Toisaalta $f(-1) = \frac{1}{2}$, $f(0) = \frac{1}{3}$, $f(1) = 0$. Siis f kuvaa reaaliakselin reaaliakselille.
Yksikköympyrä leikkaa suorassa kulmassa reaaliakselin pisteissä -1 ja 1 . Nyt kohdasta (5) Möbius-kuvausten ominaisuuksissa: kuvaympyrän tulee leikata reaaliakseli suorassa kulmassa pisteissä 0 ja $1/2$. Siis kuvaympyrän keskipiste on $1/4$ ja säde on $1/4$. Avoin yksikkökiekko kuvautuu kiekoksi $\mathbb{D}(1/4, 1/4)$.

2. Konformikuvauksista Möbius-kuvaukset ovat esimerkkejä kuvauksista, jotka säilyttävät kulmat.

11.13. **Määritelmä.** Avoimessa joukossa A analyyttinen funktio f on konforminen pisteessä $z \in A$, jos $f'(z) \neq 0$.
Jos analyyttinen funktio f on konforminen jokaisessa avoimen joukon A pisteessä, niin f on konforminen joukossa A.

11.14. *Huomautus.* Perustelua määrittelylle: Olkoon A kompleksitason avoin joukko. Olkoon $[a, b]$ reaaliakselin suljettu väli, $a < b$. Olkoon $\gamma : [a, b] \to A$,$\gamma(t) = \gamma_1(t) + i\gamma_2(t)$, $t \in [a, b]$, derivoituva polku. Määrittelemme, että polun γ tangentti pisteessä $\gamma(t_0)$ on vektori $\gamma'(t_0)$. Jos $\gamma'(t) \neq 0$ kaikilla t, joilla $\gamma'(t)$ on olemassa, niin sanomme, että polku γ on säännöllinen. Siis säännöllisellä polulla on jokaisessa pisteessä nollasta eroava tangenttivektori.
Voimme esittää tangentin seuraavasti: $\gamma'(t) = \gamma_1'(t)+i\gamma_2'(t) = r\exp(i\psi)$, missä ψ on tangenttivektorin suuntakulma eli $\arg\gamma'(t)$.

Olkoon $f : A \to \mathbb{C}$ analyyttinen. Olkoon $\gamma : [a, b] \to A$ säännöllinen polku avoimessa joukossa A. Silloin $(f \circ \gamma)'(t_0) = f'(\gamma(t_0))\gamma'(t_0)$ on kuvapolun $f \circ \gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ tangenttivektoripisteessä $f(\gamma(t_0))$. Koska $\gamma'(t_0) \neq 0$, niin tangenttivektori $(f \circ \gamma)'(t_0) = f'(\gamma(t_0))\gamma'(t_0) \neq 0$, jos $f'(\gamma(t_0)) \neq 0$. Jos $f'(\gamma(t_0)) \neq 0$, niin tangentin suuntakulma on on $\arg f'(\gamma(t_0)) + \arg\gamma'(t_0)$.

Olkoon nyt meillä kaksi säännöllistä polkua α ja β, jotka kulkevat saman pisteen z_0 kautta. Jos polkujen tangenttien suuntakulmat ovat ψ_α ja ψ_β, niin polkujen välinen kulma on $\psi_\alpha - \psi_\beta$. Jos f on analyyttinen pisteen z_0 avoimessa kiekkoympäristössä ja $f'(z_0) \neq 0$, niin kuvapolkujen välinen kulma on myös $\psi_\alpha - \psi_\beta$, edellä olevan perusteella.

Siis avoimessa joukossa analyyttinen kuvaus f, jolle $f'(z) \neq 0$, kun $z \in A$, säilyttää säännöllisten polkujen kulmat. Tämä geometrinen ominaisuus, kulmien säilyminen kuvauksessa, on nimeltään kuvauksen konformisuus.

11.15. *Huomautus.* Määrittelemme funktion konformisuuden äärettömyydessä origossa konformisen apufunktion g avulla kuten Luvussa 12 määrittelimme analyyttisyyden laajennetussa kompleksitasossa. Erityisesti Möbius-kuvaus on konforminen koko laajennetulta kompleksitasolta laajennetulle kompleksitasolle.

11.16. **Esimerkki.** Olkoot $A = \{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Re} z > 0 \text{ ja } \operatorname{Im} z > 0\}$ ja $B = \{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Im} z > 0\}$. Silloin kuvaus $f : A \to B$, $z \mapsto z^2$ on konforminen, koska f on analyyttinen ja $f'(z) = 2z \neq 0$ kaikilla $z \in A$.

11.17. *Huomautus.* Jos $f'(z) = 0$, niin kulmien ei tarvitse säilyä kuvauksessa: Esimerkiksi reaaliakseli ja imaginääriakseli leikkaavat kulmassa $\pi/2$. Jos kuitenkin $f(z) = z^2$, niin akseleiden kuvat kuvauksessa f leikkaavat kulmassa π.

11.18. **Esimerkki.** Eksponenttifunktio $\exp : \{z : -\pi < \operatorname{Im} z < \pi\} \to \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, $\exp : z \mapsto \exp(z)$ on konforminen.

3. Konformikuvaustehtävistä

Konformikuvaustehtävä: Olkoot A ja B alueita laajennetussa kompleksitasossa. On selvitettävä, onko olemassa bijektiivistä (eli one-to-one and onto) konformista kuvausta $f : A \to B$. Jos kuvaus on olemassa, niin pitää löytää sille esitys.

11.19. **Esimerkki.** Edellä olemme osoittaneet, että Möbius-kuvaus

$$f(z) = \frac{z+i}{iz+1}$$

kuvaa kiekon $\mathbb{D}(0,1)$ ylemmälle puolitasolle. Siis meillä on konformikuvaus

$$f(z) = \frac{z+i}{iz+1} : \mathbb{D}(0,1) \to \mathbb{H}_+ .$$

11.20. **Esimerkki.** Jos puolitaso $\mathbb{H}$ pitää kuvata annetulle kiekolle D, niin valitaan pisteet z_1, z_2, z_3 puolitason reunasuoralta ja w_1, w_2, w_3 kiekon reunalta ja etsitään Möbius-kuvaus f, jolle $f(z_j) = w_j$, $j = 1, 2, 3$. Tällöin $f(\mathbb{H}) = D$ tai $f(\mathbb{H}) = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{\overline{D}\}$. Jos nyt $f(\mathbb{H}) = D$, niin kuva on kiekko. Jos taas $f(\mathbb{H}) = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{\overline{D}\}$, niin yhdisteään kuvaus f kiertoon, joka vie ensin puolitason $\mathbb{H}$ komplementillensa $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{\overline{\mathbb{H}}\}$. Silloin saamme taas kuvauksen $\mathbb{H} \to D$.

11.21. **Esimerkki.** Eksponenttikuvaus kuvaa nauhan

$$\{z : 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$$

konformisesti ylemmälle puolitasolle. Silloin yhdistämällä tämä sopivaan Möbius-kuvaukseen saadaan nauha konformisesti kiekolle.

11.22. **Esimerkki.** Määrätään konformikuvaus, joka kuvaa sektorin $\{z : 0 < \operatorname{Arg} z < \pi/2, 0 < |z| < 1\}$ origokeskiseksi yksikkökiekoksi:

Avataan sektori kuvauksella $z \mapsto z^2$ ylemmäksi avoimeksi puolikiekoksi. Kuvaus

$$z \mapsto \frac{1+z}{1-z}$$

kuvaa saadun puolikiekon tason ensimmäiseksi kvadraattiksi eli joukoksi $\{z : \operatorname{Re} z > 0 \text{ ja} \operatorname{Im} z > 0\}$. (Perustelu kuvaukselle puolikiekolta: Kuvaus muodostetaan esimerkiksi siten, että kuvataan kaksoisuhteella reaaliakseli reaaliakseliksi: esimerkiksi, $-1 \mapsto 0$. $0 \mapsto 1$, $1 \mapsto \infty$. Saamme kuvauksen $z \mapsto \frac{1+z}{1-z}$. Katsotaan, minne tämä kuvaus vie yksikkökiekon kehän: yksikkökiekon kehä kuvautuu myös suoraksi, sillä $1 \mapsto \infty$. Koska $i \mapsto i$ ja $-i \mapsto -i$, niin kuvasuora on imaginääriakseli. Katsotaan vielä minne piste $i/2$ kuvautuu. Koska $i/2 \mapsto \frac{3+4i}{5}$, niin piste $i/2$ kuvautuu ensimmäiseen kvadraattiin. Nyt vain pitää muistaa, että yhtenäinen joukko kuvautuu jatkuvassa kuvauksessa yhtenäiseksi joukoksi!)
Siis meillä on nyt ensimmäinen kvadraatti. Ensimmäisen kvadraatin voimme taas kuvata ylemmäksi puolitasoksi kuvauksella $z \mapsto z^2$. Ylemmän puolitason voimme kuvata avoimeksi origokeskiseksi yksikkökiekoksi esimerksi kuvauksella

$$z \mapsto \frac{z-i}{z+i}.$$

Tämän kuvauksen saamme menettelemällä kuten Esimerkissä 11.20.
Nämä edellä olevat kuvaukset muodostavat yhdistetyn kuvauksen:

$$f(z) = \frac{(1+z^2)^2 - i(1-z^2)^2}{(1+z^2)^2 + i(1-z^2)^2}.$$

Nimittäin:

$$\begin{aligned}
w_1 &= z^2 \\
w_2 &= \frac{1+w_1}{1-w_1} = \frac{1+z^2}{1-z^2} \\
w_3 &= w_2^2 = \left(\frac{1+z^2}{1-z^2}\right)^2 \\
w_4 &= \frac{w_3 - i}{w_3 + i} = \frac{\left(\frac{1+z^2}{1-z^2}\right)^2 - i}{\left(\frac{1+z^2}{1-z^2}\right)^2 + i}.
\end{aligned}$$

11.23. **Historiasta. August Möbius** (1790–1868). Möbius-kuvaukset on nimetty August Möbiuksen mukaan kuten myös Möbius-nauha.