KOMPLEKSIANALYYSI I KURSSI
SYKSY 2014

RITVA HURRI-SYRJÄNEN

10. Laajennettu kompleksitaso

10.1. **Määritelmä.** Laajennettu kompleksitaso on

$$\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\} .$$

Piste ∞ on äärettömyyspiste. Laajennetulle kompleksitasolle on myös käytössä merkintä $\mathbb{C}_\infty$. Myös muita merkintöjä on.

Hahmottaaksemme laajennetun kompleksitason käytämme 'mallia', joka perustuu stereografiseen projektioon. Ajatellaan, että upotetaan kompleksitaso 3-ulotteiseen avaruuteen $\mathbb{R}^3$ siten, että kompleksiluvusta $x+iy$, missä $x \in \mathbb{R}$ ja $y \in \mathbb{R}$, tulee piste $(x,y,0)$. Siis kompleksitaso on hypertaso $\{(x_1,x_2,0) : x_1 \in \mathbb{R} \text{ ja } x_2 \in \mathbb{R}\}$.
Otetaan nyt pallopinta $S = S((0,0,\frac{1}{2});\frac{1}{2})$, kun keskipiste on $(0,0,\frac{1}{2})$ ja säde $\frac{1}{2}$:

$$S = \left\{ (x,y,z) : x^2 + y^2 + (z - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} \right\} .$$

Kutsutaan pistettä $(0,0,1)$ pohjoisnavaksi.
Kompleksitaso $\mathbb{C}$ voidaan kuvata pallopinnalle S seuraavasti:
Piste $z \in \mathbb{C}$ yhdistetään janalla pohjoisnapaan. Katsotaan, missä jana leikkaa pallopinnan S . Tämä antaa kuvauksen, joka kuvaa pisteen kompleksitasosta $\mathbb{C}$ pallopinnalle S . Toisaalta, jos otamme minkä tahansa pisteen x pallopinnalta S, paitsi pohjoisnavan, niin voimme ottaa puolisuoran, joka lähtee pohjoisnavalta ja kulkee pisteen x kautta ja leikkaa tason $\mathbb{C}$. Näin saamme injektion kompleksitason $\mathbb{C}$ ja pallopinnalle S , josta on poistettu pohjoisnapa. Täytetään pohjoisnapa, ja kuvataan äärettömyyspiste pohjoisnavalle. Siis kompleksitaso voidaan esittää pallonkuorena S .
Voi tietty laskea tarkat lausekkeet bijektiolle $P : \mathbb{C} \to S \backslash \{(0,0,1)\}$ ja sen käänteiskuvaukselle $P^{-1} : S\backslash(0,0,1)\} \to \mathbb{C}$:

$$P(z) = P(x+iy) = \frac{1}{|z|^2+1}(x,y,|z|^2)$$

Date: 21112014.

ja

$$z = P^{-1}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{1 - x_3}(x_1 + ix_2)\,.$$

Määritellään $P(\infty) = (0, 0, 1)$. Kuvaus P on stereografinen projektio.

Stereografinen projektio antaa laajennetulle kompleksitasolle luonnollisen metriikan:

$$d(z, w) = ||P(z) - P(w)|| \text{ ja } d(z, \infty) = ||P(z) - (0, 0, 1)||\,.$$

Jos nyt laskemme sijoittamalla kuvauksen P lausekkeen edellä olevaan, niin saamme

$$d(z, w) = \frac{|z - w|}{\sqrt{1 + |z|^2}\sqrt{1 + |w|^2}} \text{ kaikilla } z \in \mathbb{C} \text{ ja } w \in \mathbb{C}\,, \text{ ja}$$

$$d(z, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1 + |z|^2}}\,.$$

10.2. *Huomautus.* (1) Laajennettua kompleksitasoa kutsutaan Riemannin palloksi.
(2) Sovitaan, että suora sisältää äärettömyyspisteen. Jos meillä nyt on suora tai ympyrä kompleksitasossa, niin se kuvautuu stereograafisessa projektiossa pallopinnalle ympyräksi. Kääntäen, jos otamme ympyrän pallopinnalta, niin se kuvautuu joko ympyräksi tai suoraksi kompleksitasossa riippuen siitä, onko alkuperäinen ympyrä kulkenut pohjoisnavan kautta vai ei.
(3) Stereograafinen projektio on konforminen, joka tarkoittaa sitä, että se säilyttää kulmat: jos kaksi käyrää leikka toisensa kompleksitasossa kulmassa α, niin niiden stereograafiset projektiot leikkaavat pallopinnalla samassa kulmassa α.
(4) Emme tee eroa $-\infty$ ja ∞ välillä kuten reaaliakselin kanssa. Nyt on vain yksi piste äärettömyydessä ja kaiki suunnat kompleksitasolla lopulta johtavat siihen pisteeseen.
(5) Laajennettu kompleksitaso $\overline{\mathbb{C}}$ on kompakti. (Syy: S on suljettu ja rajoitettu avaruudessa $\mathbb{R}^3$ ja kuvaus $P : \overline{\mathbb{C}} \to S$ on homeomorfismi.)

Määritellään, että

$$\mathbb{D}(\infty, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z| > r\} \cup \{\infty\}\,,$$

$r > 0$, on avoin ∞-keskinen ja $r-$ säteinen avoin pallo laajennetussa kompleksitasossa $\overline{\mathbb{C}}$. Nyt voimme määritellä, että laajennetun kompleksitason joukko A on avoin, jos jokaisella $a \in A$ on olemassa avoin kiekko $\mathbb{D}(a, r) \subset A$ jollakin $r = r(a) > 0$.

10.3. *Huomautus.* Raja-arvoista laajennetussa kompleksitasossa: Olkoot $a \in \overline{\mathbb{C}}$ ja $b \in \overline{\mathbb{C}}$. Silloin $\lim_{z\to a} f(z) = b$, jos jokaisella $r > 0$ on olemassa luku $s > 0$ siten, että $f(z) \in \mathbb{D}(b,r)$ kunhan $z \in \mathbb{D}(a,s)\setminus\{a\}$.

10.1. **Analyyttisyys laajennetussa kompleksitasossa.**

10.4. **Määritelmä.** Olkoon f pisteen ∞ ympäristössä $\mathbb{D}(\infty, r)$ määritelty kompleksiarvoinen funktio. Funktio f on analyyttinen pisteessä ∞, jos funktio g,

$$g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right), 0 < |z| < r\,, \text{ ja}$$
$$g(0) = f(\infty)\,,$$

on analyyttinen origossa.

10.5. **Esimerkki.** Olkoon $f(z) = \frac{z}{z^2-4}$. Funktio on analyyttinen joukossa $\mathbb{C}\setminus\{\pm 2\}$. Jotta saadaan jatkuva kuvaus, niin asetetaan $f(\infty) = 0$. Koska $g(z) = f(1/z) = \frac{z^2}{1-4z^2}$, kun $0 < |z| < r$ ja $g(0) = f(\infty) = 0$ on analyyttinen origossa, niin f on analyyttinen pisteessä ∞.

10.6. **Määritelmä.** Pisteen z_0 ympäristössä $\mathbb{D}(z_0, r)$ määritelty kompleksiarvoinen funktio f on meromorfinen pisteessä z_0, jos $f(z_0) = \infty$ ja jos funktio h,

$$h(z) = \frac{1}{f(z)}, 0 < |z - z_0| < r\,, \text{ ja}$$
$$h(z_0) = 0\,,$$

on analyyttinen pisteessä z_0.

10.7. **Esimerkki.** Olkoon $f(z) = \frac{z}{z^2-4}$. Funktio on analyyttinen joukossa $\mathbb{C}\setminus\{\pm 2\}$. Jotta saadaan jatkuva kuvaus, niin asetetaan $f(\infty) = 0$. Edellisen esimerkin nojalla f on analyyttinen pisteessä ∞.
Entä pisteet $+2$ ja -2? Nyt $h(z) = \frac{1}{f(z)} = \frac{z^2-4}{z}$ on analyyttinen pisteen $+2$ jossain ympäristössä ja analyyttinen pisteen -2 jossain ympäristössä. Siis funktio f on meromorfinen pisteissä ± 2.

10.8. **Määritelmä.** Olkoon f pisteen ∞ ympäristössä $\mathbb{D}(\infty, r)$ määritelty kompleksiarvoinen funktio. Funktio f on meromorfinen pisteessä ∞, jos $f(\infty) = \infty$ ja jos funktio g,

$$g(z) = \frac{1}{f(1/z)}, 0 < |z| < r\,, \text{ ja}$$
$$g(0) = 0\,,$$

on analyyttinen origossa.

10.9. **Esimerkki.** Olkoon $f(z) = z^2 + z$. Asetetaan $f(\infty) = \infty$. Silloin $g(z) = \frac{1}{f(1/z)} = \frac{z^2}{1+z}$ ja $g(0) = 0$, siis g on analyyttinen pisteessä 0. Siis f on meromorfinen pisteessä ∞.

10.10. **Määritelmä.** Laajennetun kompleksitason avoimessa joukossa A määritelty funktio on meromorfinen avoimessa joukossa A, jos se on meromorfinen tai analyyttinen jokaisessa avoimen joukon A pisteessä.

10.11. **Esimerkki.** Olkoon $f(z) = \frac{z}{z^2-4}$. Edellä olevien esimerkkien nojalla funktio f on meromorfinen koko laajennetussa kompleksitasossa.