KOMPLEKSIANALYYSI I KURSSI
SYKSY 2015

RITVA HURRI-SYRJÏ¿½NEN

6. Kompleksinen integrointi

6.1. **Poluista.**

Olkoon $[\alpha, \beta]$ suljettu reaaliakselin vï¿½li, $\alpha < \beta$, ja olkoon A kompleksitason avoin joukko. **Polku** on jatkuva kuvaus

$$\gamma\colon [\alpha, \beta] \to A.$$

Piste $\gamma(\alpha)$ on alkupiste ja piste $\gamma(\beta)$ on loppupiste tai pï¿½ï¿½tepiste.

Sanonta: Polku γ on pisteestï¿½ $\gamma(\alpha)$ pisteeseen $\gamma(\beta)$.

Polku γ on **suljettu**, jos $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$.

Polun **jï¿½lki** on sen kuvajoukko

$$|\gamma| = \{z \in A : z = \gamma(t) \text{ jollain } t \in [\alpha, \beta]\} = \gamma([\alpha, \beta]).$$

6.2. **Esimerkki.** a) Olkoot a ja b kompleksitason $\mathbb{C}$ pisteitï¿½. Silloin

$$\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}, \quad \gamma(t) = a + t(b-a),\ t \in [0,1],$$

on **jana(polku)** pisteestï¿½ a pisteeseen b.
Janapolkua pisteestï¿½ a pisteeseen b merkitsemme $\gamma_{[a,b]}$.

Janapolulla $\overleftarrow{\gamma}\colon [0,1] \to \mathbb{C}$,

$$\overleftarrow{\gamma}(t) = b + t(a-b),\ t \in [0,1],$$

on sama jï¿½lki kuin polulla γ, mutta sen suunta on pisteestï¿½ b pisteeseen a.

Polku $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}$,

$$\gamma(t) = 1 + it,\ 0 \le t \le 1,$$

Date: 15102015.

on jana pisteestï¿½ 1 pisteeseen $1+i$.

b) Olkoot a kompleksitason piste ja $r>0$. Polun $\gamma_1\colon [0,2\pi]\to\mathbb{C}$,

$$\gamma_1(t)=a+r\exp(it),\ t\in[0,2\pi],$$

jï¿½lki on *positiivisesti* (eli vastapï¿½ivï¿½ï¿½n) *suunnistettu* a-keskinen r-sï¿½teinen ympyrï¿½ eli kiekon $\mathbb{D}(a,r)$ reuna $\partial\mathbb{D}(a,r)$. Sitï¿½ merkitï¿½ï¿½n $S^+(a,r)$ tai $S_r^+(a)$.

Polun $\gamma_2\colon [0,1]\to\mathbb{C}$,

$$\gamma_2(t)=a+r(\cos 2\pi t+i\sin 2\pi t),$$

jï¿½lki on sama positiivisesti suunnistettu a-keskinen, r-sï¿½teinen ympyrï¿½.

Polun $\gamma_3\colon [0,2]\to\mathbb{C}$,

$$\gamma_3(t)=a+r\exp(i\,2\pi t)$$

jï¿½lki antaa saman ympyrï¿½n kuin polut γ_1 ja γ_2, mutta nyt jokainen piste ympyrï¿½llï¿½ $S^+(a,r)$ on vï¿½lin $[0,2[$ kahden eri pisteen kuva.

Polun $\gamma\colon[\alpha,\beta]\to A$ **vastapolku** on

$$\overleftarrow{\gamma}\colon[\alpha,\beta]\to A,$$

jolle

$$\overleftarrow{\gamma}(t)=\gamma(\alpha+\beta-t).$$

Vastapolun alkupiste on $\gamma(\beta)$ ja loppupiste $\gamma(\alpha)$. Polun ja sen vastapolun jï¿½ljet ovat samat, $|\gamma|=|\overleftarrow{\gamma}|$. Vastapolku kulkee siis saman jï¿½ljen kuin alkuperï¿½inen polkukin, mutta vastakkaiseen suuntaan.

6.3. **Esimerkki.** Olkoon $\gamma\colon[0,2\pi]\to\mathbb{C}$,

$$\gamma(t)=\exp(it).$$

Silloin $\overleftarrow{\gamma}\colon[0,2\pi]\to\mathbb{C}$,

$$\overleftarrow{\gamma}(t)=\exp(i(2\pi-t))=\exp(-it).$$

Olkoot $\gamma_1\colon[\alpha_1,\beta_1]\to A$ ja $\gamma_2\colon[\alpha_2,\beta_2]\to A$ polkuja, joille $\gamma_1(\beta_1)=\gamma_2(\alpha_2)$. Silloin **tulopolku** on $\gamma_1*\gamma_2\colon[\alpha_1,\beta_2+\beta_1-\alpha_2]\to A$,

$$\gamma_1*\gamma_2(t)=\begin{cases}\gamma_1(t) & t\in[\alpha_1,\beta_1]\\ \gamma_2(t+\alpha_2-\beta_1) & t\in[\beta_1,\beta_2+\beta_1-\alpha_2].\end{cases}$$

6.4. **Esimerkki.** Olkoot $\gamma_1\colon [0,\pi] \to \mathbb{C}$,

$$\gamma_1(t) = \cos t + i \sin t,$$

ja $\gamma_2\colon [0,1] \to \mathbb{C}$,

$$\gamma_2(t) = 2t - 1.$$

Silloin $\gamma_1 * \gamma_2\colon [0, 1+\pi] \to \mathbb{C}$,

$$\gamma_1 * \gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & t \in [0,\pi] \\ \gamma_2(t-\pi) = 2(t-\pi) - 1, & t \in [\pi, 1+\pi]. \end{cases}$$

Polun $\gamma_1 * \gamma_2$ jï¿½lki on suljettu puoliympyrï¿½.

6.5. **C^1-polut.**

Tï¿½mï¿½ on tï¿½rkeï¿½ asia!

Olkoon $\gamma\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ polku (eli jatkuva kuvaus). Merkitï¿½ï¿½n

$$x(t) := \operatorname{Re} \gamma(t)$$
$$y(t) := \operatorname{Im} \gamma(t).$$

Siis

$$\gamma(t) = x(t) + iy(t),$$

missï¿½

$$x\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{R} \qquad \text{ja} \qquad y\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$$

ovat jatkuvia kuvauksia.

Polku γ on **derivoituva polku**, jos $x\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ ja $y\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ ovat derivoituvia funktioita siten, että vï¿½lin $[\alpha,\beta]$ pï¿½ï¿½tepisteissï¿½ on toispuoleiset derivaatat. Polun γ derivaatta on

$$\gamma'(t) = x'(t) + iy'(t).$$

Polku γ on **jatkuvasti derivoituva polku**, jos funktiot $x\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ ja $y\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ ovat jatkuvasti derivoituvia, eli on olemassa $\gamma'(t)$ kaikilla $t \in [\alpha,\beta]$ ja γ' on jatkuva vï¿½lillï¿½ $[\alpha,\beta]$. Tï¿½llï¿½in sanotaan, ettï¿½ polku γ on **C^1-polku**.

6.6. **Esimerkki.** Polku $\gamma\colon [0,\pi] \to \mathbb{C}, \gamma(t) = \cos t + i \sin t$, on jatkuvasti derivoituva polku.

Olkoon $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta$ vï¿½lin $[\alpha,\beta]$ jako. Jos polku γ on jatkuvasti derivoituva jokaisella osavï¿½lillï¿½ $[t_{k-1}, t_k]$, $1 \le k \le n$, niin polku γ on **paloittain jatkuvasti derivoituva**.

<u>Sanonta:</u> Polku γ on paloittain C^1-polku.

Merkitsemme $\gamma_k = \gamma|_{[t_{k-1},t_k]}, k = 1, \ldots, n$.

6.7. **Esimerkki.** Tulopolkuesimerkin polku $\gamma_1 * \gamma_2 \colon [0, 1+\pi] \to \mathbb{C}$ on paloittain jatkuvasti derivoituva.

6.8. **Parametrin vaihto.**

Polun uudelleen parametrisointi.

Olkoon $\gamma_1 \colon [\alpha_1, \beta_1] \to \mathbb{C}$ jatkuvasti derivoituva polku.
Jatkuvasti derivoituva polku $\gamma_2 \colon [\alpha_2, \beta_2] \to \mathbb{C}$ **on saatu polusta** γ_1 **parametria vaihtamalla**, jos on olemassa aidosti kasvava, jatkuvasti derivoituva bijektio

$$\varphi \colon [\alpha_2, \beta_2] \to [\alpha_1, \beta_1]$$

siten, ettï¿½

$$\gamma_2(s) = (\gamma_1 \circ \varphi)(s) \quad \text{kaikilla } s \in [\alpha_2, \beta_2].$$

Kuvaus φ on **parametrinvaihtokuvaus.**

Sanonta: Polku γ_2 on polun γ_1 uudelleen parametrisointi.

6.9. *Huomautus.* Polulla γ_2 on samat alku- ja loppupiste kuin polulla γ_1. Poluilla on sama jï¿½lki ja ne "kulkevat samaan suuntaan", mutta mahdollisesti eri nopeuksilla.

6.10. **Esimerkki.** Olkoot $a \in \mathbb{C}$ ja $b \in \mathbb{C}$ ja $a \neq b$. Olkoon

$$\gamma_1(t) = a + t(b-a),\ t \in [0,1].$$

Mï¿½ï¿½ritellï¿½ï¿½n

$$\gamma_2(s) = a + s\,\frac{b-a}{|a-b|},\ s \in [0, |a-b|].$$

Silloin, jos

$$\varphi(s) = \frac{s}{|a-b|},\ s \in [0, |a-b|],$$

niin

$$(\gamma_1 \circ \varphi)(s) = \gamma_1(\varphi(s)) = a + s\,\frac{b-a}{|a-b|} = \gamma_2(s).$$

Polku γ_2 on siis saatu C^1-polusta γ_1 parametrin vaihdolla.

Sanonta: Polulla γ_2 on polun/kï¿½yrï¿½n pituus parametrina.

6.11. **Integrointi yli reaalisen vï¿½lin.**

Olkoon $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ jatkuva funktio, $f(t) = u(t) + iv(t)$, missä $u(t) \in \mathbb{R}$ ja $v(t) \in \mathbb{R}$. Mï¿½ï¿½ritellï¿½ï¿½n funktion f integraali yli reaalisen vï¿½lin $[a,b]$ asettamalla

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i\int_a^b v(t)dt,$$

missï¿½ integraalit funktioista u ja v ovat tavalliset reaaliset Riemann-integraalit.

Nï¿½in mï¿½ï¿½ritelty integraali noudattaa tavallisia Riemann-integraalin ominaisuuksia. Funktion f integraalin arvo yli vï¿½lin $[a,b]$ on kompleksiluku.

6.12. **Integraali pitkin polkua.**

Olkoon A kompleksitason avoin joukko. Olkoon $\gamma\colon [a,b] \to A$ jatkuvasti derivoituva polku kompleksitason avoimessa joukossa A. Määritellään jatkuvan funktion $f\colon A \to \mathbb{C}$ **integraali pitkin polkua** γ (eli integraali yli polun) asettamalla

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

Olkoon $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ vï¿½lin $[a,b]$ jako. Jos polku γ on jatkuvasti derivoituva jokaisella osavï¿½lillï¿½ $[t_{k-1}, t_k], 1 \le k \le n$, niin polku γ on paloittain jatkuvasti derivoituva. Kun merkitsemme $\gamma_k = \gamma|_{[t_{k-1},t_k]}$, niin mï¿½ï¿½rittelemme

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} f(z)dz.$$

6.13. **Esimerkki.** Olkoon γ_1 janapolku pisteestï¿½ 1 pisteeseen $1+i$. Silloin (esimerkiksi)

$$\gamma_1(t) = 1 + it,\ t \in [0,1],$$

ja siis

$$\int_{\gamma_1} z\,dz = \int_0^1 (1+it)i\,dt = \int_0^1 (i-t)\,dt = \Big/_{\!0}^{1} \left(it - \frac{1}{2}t^2\right) = i - \frac{1}{2}.$$

Jos me parametrisoimme janapolun γ_1 eri tavalla, esimerkiksi

$$\gamma_2(s) = 1 + 2is,\ s \in \left[0, \frac{1}{2}\right],$$

niin

$$\int_{\gamma_2} z dz = \int_0^{1/2} (1 + 2is)2i\, ds = 2\int_0^{1/2} (i - 2s) ds = 2 \Big/_{0}^{1/2} (is - s^2) = i - \frac{1}{2}.$$

Yleisemmin pï¿½tee:

6.14. **Lause** (Integraalin invarianssi)**.** *Olkoot* $\gamma_1 \colon [a, b] \to A$ *jatkuvasti derivoituva polku ja polku* $\gamma_2 \colon [c, d] \to A$ *polun* γ_1 *uudelleen parametrisointi. Silloin*

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

Todistus: Koska γ_2 on polun γ_1 uudelleen parametrisointi, niin on olemassa jatkuvasti differentioituva funktio $\phi \colon [c, d] \to [a, b]$ siten, ettï¿½ $\phi'(t) > 0$ kaikilla $t \in [c, d]$, $\phi(c) = a$, $\phi(d) = b$ ja $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \phi$. Tï¿½llï¿½in muuttujanvaihdon $t = \phi(s)$, $dt = \phi'(s)ds$ avulla

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_1} f(z)dz &= \int_a^b f(\gamma_1(t)){\gamma_1}'(t)dt = \int_c^d f(\gamma_1(\phi(s)))\, {\gamma_1}'(\phi(s))\, \phi'(s)ds \\
&= \int_c^d f((\gamma_1 \circ \phi)(s))\, D(\gamma_1 \circ \phi)(s)ds = \int_c^d f(\gamma_2(s)){\gamma_2}'(s)ds \\
&= \int_{\gamma_2} f(z)dz.
\end{aligned}$$

Integraalin lineaarisuus seuraa vï¿½littï¿½mï¿½sti Riemann-integraalin lineaarisuudesta:

6.15. **Lause** (Integraalin lineaarisuus)**.** *Olkoon* γ *jatkuvasti derivoituva polku kompleksitason avoimessa joukossa* A. *Jos funktiot* $f \colon A \to \mathbb{C}$ *ja* $g \colon A \to \mathbb{C}$ *ovat jatkuvia kompleksitason avoimessa joukossa* A, *niin*

$$\int_\gamma (\lambda f + \mu g)(z)\, dz = \lambda \int_\gamma f(z)dz + \mu \int_\gamma g(z)dz$$

kaikilla kompleksisilla vakioilla λ *ja* μ.

6.16. **Lause** (Tulopolun integraali)**.** *Olkoot* $\gamma \colon [\alpha_1, \beta_1] \to A$ *ja* $\nu \colon [\alpha_2, \beta_2] \to A$ *jatkuvasti derivoituvia polkuja kompleksitason avoimessa joukossa* A. *Jos tulopolku* $\gamma * \nu$ *on mï¿½ï¿½ritelty, niin*

$$\int_{\gamma * \nu} f(z)dz = \int_\gamma f(z)dz + \int_\nu f(z)dz.$$

6.17. **Esimerkki.** Jos otamme janapolun pisteestï¿½ 1 pisteeseen $1+i$,

$$\gamma_1\colon [0,1] \to \mathbb{C},\ \gamma_1(t) = 1 + it,\ t \in [0,1],$$

ja sen vastapolun pisteestï¿½ eli

$$\overleftarrow{\gamma}_1\colon [0,1] \to \mathbb{C},\ \overleftarrow{\gamma}_1(t) = 1 + i(1-t),\ t \in [0,1],$$

niin

$$\begin{aligned}\int_{\overleftarrow{\gamma}_1} z\,dz &= \int_0^1 (1+i(1-t))(-i)dt \\ &= \int_0^1 (-i+1-t)dt = \Big/_{0}^{1} \left[(1-i)t - \frac{1}{2}t^2\right] = 1 - i - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - i\end{aligned}$$

eli

$$\int_{\overleftarrow{\gamma}_1} z\,dz = -\int_{\gamma_1} z\,dz.$$

Yleisemmin pï¿½tee:

6.18. **Lause** (Vastapolun integraali)**.**

$$\int_{\overleftarrow{\gamma}} f(z)dz = -\int_{\gamma} f(z)dz.$$

<u>Huomaa</u>, ettï¿½ vaikka $|\overleftarrow{\gamma}| = |\gamma|$, niin polun suunnistus eli se "mihin suuntaan polkua kuljetaan" vaikuttaa integraalin arvoon.

Vastapolun integraalilauseen todistus: Invarianssilauseen nojalla voimme valita polun γ mï¿½ï¿½rittelyvï¿½liksi yksikkï¿½vï¿½lin $[0,1]$. Silloin

$$\overleftarrow{\gamma}\colon [0,1] \to A,$$

$$\overleftarrow{\gamma}(t) = \gamma(0+1-t) = \gamma(1-t).$$

Tï¿½llï¿½in muuttujanvaihdolla $s = 1-t$ saadaan

$$\begin{aligned}\int_{\overleftarrow{\gamma}} f(z)dz &= \int_0^1 f(\overleftarrow{\gamma}(t))\,(\overleftarrow{\gamma}\,)'(t)dt \\ &= \int_0^1 f(\gamma(1-t))\,\gamma\,'(1-t)(-1)dt = -\int_0^1 f(\gamma(1-t))\,\gamma\,'(1-t)dt \\ &= -(-1)\int_1^0 f(\gamma(s))\,\gamma\,'(s)ds = -\int_0^1 f(\gamma(s))\,\gamma\,'(s)ds \\ &= -\int_{\gamma} f(z)dz.\end{aligned}$$

<u>Muistutus:</u> Integraalin

$$\int_\gamma f(z)dz$$

arvo riippuu vain polun γ suunnistuksesta ja funktion arvoista polulla γ, mutta ei polun γ uudelleen parametrisoinnista.

Seuraava esimerkki on tärkeä. Tarvitsemme sitä myöhemmin.

6.19. **Esimerkki.** Olkoon polun γ jï¿½lki positiivisesti suunnistettu r-sï¿½teinen a-keskinen ympyrï¿½;

$$\gamma(t) = a + r\exp(it),\ t \in [0, 2\pi].$$

Mï¿½ï¿½rï¿½tï¿½ï¿½n

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-a}.$$

Koska $\gamma\,'(t) = ri\exp(it)$, niin

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-a} = \int_0^{2\pi} \frac{ri\exp(it)}{a + r\exp(it) - a}dt = \int_0^{2\pi} idt = 2\pi i.$$

Mï¿½ï¿½rï¿½tï¿½ï¿½n

$$\int_\gamma (z-a)^n dz,\ \text{kun } n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}.$$

Kun $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$, niin

$$\begin{aligned}\int_\gamma (z-a)^n dz &= \int_0^{2\pi} (a + r\exp(it) - a)^n\, ri\exp(it)dt \\ &= r^{n+1} i \int_0^{2\pi} \exp\big(i(n+1)t\big)dt \\ &= \frac{ir^{n+1}}{i(n+1)} \Big/_{0}^{2\pi} \exp\big(i(n+1)t\big) = 0,\end{aligned}$$

koska

$$\exp z = \exp(z + 2\pi ni),\ z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{Z}.$$

<u>Merkintï¿½:</u> Jos polku γ on a-keskisen r-sï¿½teisen ympyrï¿½n positiivisesti suunnistettu parametrisointi, niin voimme merkitï¿½

$$\int\limits_\gamma f(z)dz = \int\limits_{S^+(a;r)} f(z)dz = \int\limits_{\partial\mathbb{D}(a,r)} f(z)dz.$$

Siis edellisestï¿½ esimerkistï¿½

$$\int_{S^+(a;r)} (z-a)^n dz = \begin{cases} 2\pi i, & n=-1, \\ 0, & n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}. \end{cases}$$

6.20. *Huomautus.* Polun γ polkuintegraalissa dz tarkoittaa intuitiivisesti lisï¿½ystï¿½, kun $z=\gamma(t)$ muuttuu. Jos otamme huomioon vain luvun z modulin muutoksen pitkin polkua, niin saamme kï¿½sitteen "integraali polun γ kaarenpituuden suhteen".

6.21. **Integraali kaarenpituuden suhteen.**

Olkoon $\gamma\colon [a,b] \to A$ jokin C^1-polku kompleksitason avoimessa joukossa A ja olkoon $f\colon A \to \mathbb{C}$ jatkuva funktio. Funktion f integraali polun γ kaarenpituuden suhteen määritellään asettamalla

$$\int_\gamma f(z)|dz| = \int_a^b f(\gamma(t))|\gamma'(t)|dt.$$

<u>Muistutus:</u> Jatkuvasti derivoituvan polun $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ pituus on

$$\text{length}(\gamma) = \int_\gamma |dz| = \int_a^b |\gamma'(t)|dt.$$

6.22. **Esimerkki.** Olkoon $\gamma(t) = z_0 + r\exp(it), t \in [0,2\pi]$. Polun γ jï¿½lki on z_0-keskinen r-sï¿½teinen ympyrï¿½. Polun γ pituus eli r-sï¿½teisen ympyrï¿½n kehï¿½n pituus on

$$\text{length}(\gamma) = \int_0^{2\pi} |ri\exp(it)|dt = \int_0^{2\pi} r dt = 2\pi r.$$

Integraalilla polun kaarenpituuden suhteen on seuraavat ominaisuudet:

(1) Integraalin lineaarisuus:

$$\int_\gamma (\lambda f + \mu g)(z)|dz| = \lambda \int_\gamma f(z)|dz| + \mu \int_\gamma g(z)|dz|$$

kompleksisille vakioille λ ja μ.

(2) Vastapolun integraali kaarenpituuden suhteen:

$$\int_{\overleftarrow{\gamma}} f(z)|dz| = \int_\gamma f(z)|dz|.$$

(3) Tulopolun integraali kaarenpituuden suhteen:

$$\int\limits_{\gamma * \nu} f(z)|dz| = \int\limits_{\gamma} f(z)|dz| + \int\limits_{\nu} f(z)|dz|.$$

Todistus: Integraalin lineaarisuuden todistaminen ja tulopolun integroinnin todistaminen menevï¿½t kuten edellï¿½.
Todistamme vï¿½itteen

$$\int\limits_{\overleftarrow{\gamma}} f(z)|dz| = \int_{\gamma} f(z)|dz|.$$

Kuten edellï¿½ voimme valita parametrivï¿½liksi yksikkï¿½vï¿½lin $[0,1]$, jolloin

$$\overleftarrow{\gamma}(t) = \gamma(1-t).$$

Nyt

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\overleftarrow{\gamma}} f(z)|dz| &= \int_0^1 f(\overleftarrow{\gamma}(t))\,|(\overleftarrow{\gamma})'(t)|dt = \int_0^1 f(\gamma(1-t))\,|\gamma'(1-t)(-1)|dt \\
&= \int_0^1 f(\gamma(1-t))\,|\gamma'(1-t)|dt \overset{s=1-t}{=} \int_1^0 f(\gamma(s))\,|\gamma'(s)|(-ds) \\
&= \int_0^1 f(\gamma(s))\,|\gamma'(s)|ds = \int\limits_{\gamma} f(z)|dz|.
\end{aligned}$$

Seuraava lemma on tï¿½rkeï¿½ ja erittäin käyttökelpoinen!

6.23. **Arviolemma.** *Jos γ on paloittain jatkuvasti differentioituva C^1-polku ja f on polun γ ympï¿½ristï¿½ssï¿½ mï¿½ï¿½ritelty jatkuva funktio ja $|f(z)| \leq M$ polulla γ, niin*

$$\left|\int\limits_{\gamma} f(z)dz\right| \leq \int\limits_{\gamma} |f(z)|\,|dz| \leq M \text{ length}(\gamma).$$

6.24. **Esimerkki.** Olkoot $f\colon z \mapsto \exp(iz^2)$ ja

$$\gamma\colon \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \to \mathbb{C},\ \gamma(t) = r\exp(it),\ t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right].$$

<u>Vï¿½ite:</u>

$$\left|\int\limits_{\gamma} f(z)dz\right| \leq \frac{\pi(1-e^{-r^2})}{4r}.$$

Todistus: Arviolemman nojalla

$$\left|\int_\gamma \exp(iz^2)dz\right| \le \int_\gamma \left|\exp(iz^2)\right||dz| = \int_0^{\pi/4}\left|\exp(i\gamma(t)^2)\right| |\gamma'(t)|dt$$

$$= \int_0^{\pi/4}\left|\exp(i\gamma(t)^2)\right| rdt.$$

Jos $z = x + iy$, missï¿½ $x \in \mathbb{R}$ ja $y \in \mathbb{R}$, niin

$$|\exp(iz^2)| = \exp(\mathrm{Re}(iz^2)) = \exp(-2xy),$$

koska

$$iz^2 = i(x+iy)^2 = -2xy + i(x^2 - y^2).$$

Jos

$$z = \gamma(t) = r\exp(it) = r(\cos t + i\sin t),$$

niin

$$|\exp(i\gamma(t)^2)| = \exp(-r^2\, 2\cos t\sin t) = \exp(-r^2\, \sin 2t).$$

Muuttujanvaihdolla $s = 2t$ ja arviota $\sin s \ge \frac{2s}{\pi}$ kaikilla $0 \le s \le \pi/2$, kï¿½yttï¿½mï¿½llï¿½ saadaan

$$\left|\int_\gamma \exp(iz^2)dz\right| \le \int_0^{\pi/4} e^{-r^2\,\sin 2t} rdt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} e^{-r^2\,\sin s} rds$$

$$\le \frac{r}{2}\int_0^{\pi/2} e^{\frac{-2r^2}{\pi}s} ds = \frac{\pi}{4r}\left(1 - e^{-r^2}\right).$$

Siis väite pätee.

6.25. **Integraalifunktiot** (primitiivit, kantafunktiot, antiderivaatat)**.**

Olkoon A kompleksitason avoin osajoukko. Olkoon $f\colon A \to \mathbb{C}$ jatkuva kuvaus. Joukossa A mï¿½ï¿½ritelty analyyttinen funktio F on funktion f integraalifunktio (primitiivi, kantafunktio, antiderivaatta), jos

$$F'(z) = f(z), \text{ kaikilla } z \in A.$$

6.26. **Esimerkki.** Funktio

$$F(z) = \frac{z^4}{4}$$

on funktion $f(z) = z^3$ integraalifunktio; funktio

$$G(z) = \frac{z^4}{4} + 5$$

on myös funktion $f(z) = z^3$ integraalifunktio.

Funktio $z \mapsto \sin z$ on funktion $z \mapsto \cos z$ integraalifunktio. Funktio $z \mapsto \sinh(z)$ on funktion $z \mapsto \cosh(z)$ integraalifunktio.

6.27. *Huomautus.* Jos funktio F on funktion f integraalifunktio, niin myï¿½s funktio $F + C$, missï¿½ $C \in \mathbb{C}$ on vakio, on funktion f integraalifunktio.

6.28. **Lause** (Polkuintegraalin peruslause 1.)**.** *Olkoon A kompleksitason avoin osajoukko. Olkoon analyyttinen funktio F jatkuvan funktion $f\colon A \to \mathbb{C}$ integraalifunktio. Silloin jokaisella paloittain C^1-polulla γ, missä $\gamma\colon [a,b] \to A$,*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))\,.$$

Todistus: 1° Olkoon $\gamma\colon [a,b] \to A$ jokin C^1-polku. Silloin

$$(F \circ \gamma)'(t) = F'(\gamma(t))\,\gamma'(t) = f(\gamma(t))\gamma'(t)$$

ja siis

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\,dz &= \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt}\big((F \circ \gamma)(t)\big)dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).\end{aligned}$$

2° Olkoon $\gamma\colon [a,b] \to A$ paloittain C^1-polku. Olkoon $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ vï¿½lin $[a,b]$ jako siten, ettï¿½ $\gamma_k = \gamma\big|_{[t_k,t_{k+1}]}\colon [t_k,t_{k+1}] \to A$, $k = 0,1,\ldots,n-1$, ovat C^1-polkuja. Silloin

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)dz &= \sum_{k=0}^{n-1}\int_{\gamma_k} f(z)dz = \sum_{k=0}^{n-1}\big(F(\gamma(t_{k+1})) - F(\gamma(t_k))\big) \\ &= F(\gamma(t_1)) - F(\gamma(t_0)) + F(\gamma(t_2)) - F(\gamma(t_1)) + \ldots \\ &+ F(\gamma(t_n)) - F(\gamma(t_{n-1})) = F(\gamma(t_n)) - F(\gamma(t_0)) \\ &= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).\end{aligned}$$

6.29. **Esimerkki.** Olkoon $\gamma\colon [0,\pi] \to \mathbb{C}$,

$$\gamma(t) = t + i\frac{t^2}{\pi}.$$

Olkoon $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $f(z) = \exp(z)$. Silloin funktion f integraalifunktio on $F(z) = \exp(z)$, sillï¿½ $\exp'(z) = \exp(z)$. Siis

$$\int_\gamma \exp(z)dz = \exp(\pi + i\pi) - \exp(0)$$

$$= \exp(\pi)\,\exp(i\pi) - \exp(0)$$
$$= e^\pi \big(\cos\pi + i\sin\pi\big) - 1 = -e^\pi - 1.$$

Peruslauseen 1 korollaari:

6.30. **Korollaari 1.** *Olkoon A kompleksitason avoin joukko. Jos jatkuvalla funktiolla $f\colon A \to \mathbb{C}$ on integraalifunktio (primitiivi, antiderivaatta) avoimessa joukossa A, niin*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

kaikilla suljetuilla paloittain C^1-poluilla γ avoimessa joukossa A.

6.31. *Huomautus.* Muistutus: $\gamma_{[z_1,z_2]}$ on janapolku pisteestï¿½ z_1 pisteeseen z_2.
Polku $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ on <u>murtoviiva</u>, jos on olemassa vï¿½lin $[a,b]$ jako

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$$

siten, ettï¿½

$$\gamma = \gamma_{[\gamma(t_0),\gamma(t_1)]} * \cdots * \gamma_{[\gamma(t_{n-1}),\gamma(t_n)]}.$$

Kompleksitason avoin ja yhtenäinen joukko on **alue**.
Avoimelle joukolle A seuraavat ovat yhtäpitävät:
(1) A on yhtenäinen
(2) A on polkuyhtenäinen
(3) A on murtoviivayhtenäinen.
Erityisesti siis alueessa mielivaltaisesti valitut kaksi pistettä voidaan yhdistï¿½ï¿½ toisiinsa jatkuvalla murtoviivalla, joka kulkee kokonaisuudessaan joukossa.

Peruslauseen toinen korollaari :

6.32. **Korollaari 2.** *Alueessa analyyttinen funktio on vakio, jos ja vain jos sen derivaatta on nolla.*

Todistus:" $\Longrightarrow$ " selvï¿½.
" $\Longleftarrow$ " Olkoon A kompleksitason alue ja $F\colon A \to \mathbb{C}$ analyyttinen. Olkoon $F'(z) = f(z) = 0$ kaikilla $z \in A$. Joukko A on alue ja siten yhtenï¿½inen. Siis jokaiselle pisteparille $z \in A$ ja $w \in A$ on olemassa murtoviiva, joka yhdistï¿½ï¿½ pisteet z ja w alueessa A. Murtoviivalle

on olemassa paloittain lineaarinen parametrisointi ja se on paloittain C^1-polku. Kiinnitetï¿½ï¿½n $z_0 \in A$. Kun $z \in A$, niin voidaan valita jokin pisteestï¿½ z_0 pisteeseen z kulkeva murtoviiva γ. Peruslauseen 1 nojalla

$$F(z) - F(z_0) = \int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma F'(z)dz = \int_\gamma 0 = 0.$$

Siis $F(z) = F(z_0)$ kaikilla $z \in A$.

6.33. **Korollaari 3.** *Olkoon A kompleksitason alue. Jos funktiot F ja G ovat jatkuvan funktion $f\colon A \to \mathbb{C}$ integraalifunktioita alueessa A, niin erotus $F - G$ on vakio.*

Todistus: Jos F ja G ovat jatkuvan funktion $f\colon A \to \mathbb{C}$ integraalifunktioita, niin

$$(F - G)'(z) = F'(z) - G'(z) = f(z) - f(z) = 0$$

kaikilla $z \in A$. Siis edellisen Korollaarin nojalla $F - G$ on vakio.

6.34. **Polkuintegraalin peruslause 2. [Integraalifunktion karakterisaatiolause]** Olkoon f jatkuva kompleksiarvoinen funktio alueessa A. Tï¿½llï¿½in funktiolla f on integraalifunktio, jos ja vain jos alueen A jokaisella suljetulla paloittain C^1-polulla γ pï¿½tee

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

Havainto: Funktiolla $f\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \frac{1}{z}$, ei ole integraalifunktiota alueessa $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, sillï¿½ aikaisemmin osoitimme, ettï¿½ kun $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\gamma(t) = \exp(it)$, niin

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \neq 0.$$

Integraalifunktion karakterisaatiolauseen todistus: " $\Longrightarrow$ " Olkoon funktiolla f integraalifunktio. Jos paloittain C^1-polku $\gamma\colon [a, b] \to A$ on suljettu, niin $\gamma(a) = \gamma(b)$, ja vï¿½ite seuraa Peruslauseen 1 korollaarista.
" $\Longleftarrow$ " Olkoon siis funktio f jatkuva ja

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

jokaisella suljetulla paloittain C^1-polulla γ. On osoitettava, ettï¿½ funktiolla f on integraalifunktio.

Olkoon $z_0 \in A$ mielivaltaisesti valittu kiinteï¿½ piste. Jos $z \in A$, niin, koska joukko A on alue, on olemassa jatkuva murtoviiva γ_z alueessa A siten, ettï¿½ murtoviivan alkupiste on z_0 ja loppupiste on z.

Jos γ on jokin toinen paloittain C^1-polku pisteestï¿½ z_0 pisteeseen z, niin $\overleftarrow{\gamma} * \gamma_z$ on alueessa A paloittain derivoituva suljettu polku ja oletuksen nojalla

$$0 = \int\limits_{\overleftarrow{\gamma}*\gamma_z} f(\xi)d\xi = \int\limits_{\overleftarrow{\gamma}} f(\xi)d\xi + \int\limits_{\gamma_z} f(\xi)d\xi = -\int\limits_{\gamma} f(\xi)d\xi + \int\limits_{\gamma_z} f(\xi)d\xi.$$

Määritellään integraali

$$F(z) := \int\limits_{\gamma_z} f(\xi)d\xi\,. \tag{1}$$

Kun z on kiinnitetty, niin integraalin arvo ei riipu polun γ_z valinnasta. Osoitamme, ettï¿½ yhtï¿½lï¿½n (1) mï¿½ï¿½rittelemï¿½ funktio F on funktion f integraalifunktio.

Osoitamme, että kaikilla $\epsilon > 0$ on olemassa luku $\delta_\epsilon > 0$ siten, että

$$\left|\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z)\right| < \epsilon\,,$$

kunhan $|h| < \delta_\epsilon$. Olkoon siis nyt $\epsilon > 0$ annettu. Tulopolku $\gamma_z * \gamma_{[z,z+h]}$ on polku pisteestï¿½ z_0 pisteeseen $z+h$; ensin kuljetaan polulla γ_z pisteeseen z ja sitten janapolulla $\gamma_{[z,z+h]}$ pisteeseen $z+h$. Silloin

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z)\right| \\
&= \left|\frac{1}{h}\Big(\int\limits_{\gamma_z*\gamma_{[z,z+h]}} f(\xi)d\xi - \int\limits_{\gamma_z} f(\xi)d\xi\Big) - f(z)\frac{h}{h}\right| \\
&= \left|\frac{1}{h}\Big(\int\limits_{\gamma_z} f(\xi)d\xi + \int\limits_{\gamma_{[z,z+h]}} f(\xi)d\xi - \int\limits_{\gamma_z} f(\xi)d\xi - \int\limits_{\gamma_{[z,z+h]}} f(z)d\xi\Big)\right| \\
&= \left|\frac{1}{h}\Big(\int\limits_{\gamma_{[z,z+h]}} f(\xi)d\xi - \int\limits_{\gamma_{[z,z+h]}} f(z)d\xi\Big)\right| \\
&= \left|\frac{1}{h}\int\limits_{\gamma_{[z,z+h]}} \Big(f(\xi) - f(z)\Big)d\xi\right|.
\end{aligned}$$

Olkoon $\xi \in \gamma_{[z,z+h]}$. Funktion f jatkuvuuden nojalla

$$|f(\xi) - f(z)| < \epsilon\,,$$

kunhan $|\xi - z| < \delta_\epsilon$ eli kunhan $|h| < \delta_\epsilon$. Nyt arviolemman nojalla

$$\Big|\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z)\Big| \leq \frac{1}{|h|}\epsilon|h| = \epsilon\,,$$

kunhan $|h| < \delta_\epsilon$. Siis $F'(z) = f(z)$ kaikilla $z \in A$.

6.35. **Esimerkki.** (1) Olkoon $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = \exp(it)$. Silloin

$$\int_\gamma \overline{z} dz = \int_0^{2\pi} \overline{\exp(it)}\, \underbrace{i\exp(it)}_{\gamma'(t)}\, dt = \int_0^{2\pi} \underbrace{|\exp(it)|}_{1}\, idt = 2\pi i \neq 0.$$

Funktiolla $z \mapsto \overline{z}$ ei siis voi olla antiderivaattaa missï¿½ï¿½n alueessa, jossa on yksikkï¿½kiekon kehï¿½. (Itse asiassa, funktiolla $z \mapsto \overline{z}$ ei ole antiderivaattaa missï¿½ï¿½n.)

(2) Koska funktiolla $z \mapsto z^2$ on antiderivaatta, nimittï¿½in $\frac{1}{3}z^3$, niin

$$\int_\gamma z^2 dz = 0$$

jokaisella suljetulla C^1-polulla γ.

Merkintï¿½ï¿½

$$\oint_\gamma$$

joskus kï¿½ytetï¿½ï¿½n merkinnï¿½n $\int_\gamma$ tilalla, kun integroidaan yli suljetun polun γ.

6.36. *Huomautus.* Jos integroitavana funktiona on $z \mapsto \exp(z^2)$, niin nï¿½yttï¿½isi olevan vaikea selvittï¿½ï¿½ pï¿½teekï¿½

$$\oint_\gamma \exp(z^2) dz = 0$$

jokaisella suljetulla C^1-polulla γ. Seuraavassa luvussa osoittautuu, että riittää tietää integroitavan funktion analyyttisyys.