KOMPLEKSIANALYYSI I KURSSI
SYKSY 2015

RITVA HURRI-SYRJÄNEN

5. Eksponenttifunktio ja sini- ja kosinifunktiot

Kertausta. (1) Reaaliselle eksponenttifunktiolle $e^x \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ pätee

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \text{kaikilla } x \in \mathbb{R}.$$

(2) Kompleksitermisen potenssisarjan

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

suppenemissäde on $R = \infty$, ja erityisesti siis tämä potenssisarja on itseisesti suppeneva koko kompleksitasossa. Sarja

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

määrittelee siis analyyttisen funktion $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$. (Itse asiassa sarjan määrittelemän funktion arvot kuuluvat joukkoon $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.)

5.1. **Määritelmä.** Kompleksinen eksponenttifunktio $\exp \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ määritellään asettamalla

$$\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

5.2. *Huomautus.* Koska reaalisen eksponenttifunktion $x \mapsto e^x$ Taylorin kehitelmä on

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \text{kaikilla } x \in \mathbb{R},$$

niin

$$\exp(x) = e^x \quad \text{kaikilla } x \in \mathbb{R}.$$

Date: 02102015.

5.1. **Kompleksisen eksponenttifunktion ominaisuuksia.** 1.^{o} Eksponenttifunktio on analyyttinen koko kompleksitasossa ja

$$\exp'(z) = \exp(z) \quad \text{jokaisella } z \in \mathbb{C} :$$

Esimerkin 4.28 (2) ja Lauseen 4.37 nojalla

$$\exp'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{1}{n!} z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \exp(z).$$

2.^{o} $\exp(z+w) = \exp(z)\,\exp(w)$ kaikilla $z, w \in \mathbb{C}$:
Mertensin lauseen nojalla Cauchyn tulokaava sarjoille (Kotitehtävä 5.4) ja binomikaava antavat

$$\begin{aligned}\exp(z)\,\exp(w) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} w^k\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p\,!} z^p \frac{1}{(n-p)!} w^{n-p} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{p=0}^{n} \frac{n!}{p\,!(n-p)!}\, z^p\, w^{n-p} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} z^p w^{n-p} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z+w)^n = \exp(z+w)\end{aligned}$$

3.^{o} Eksponenttifunktiolla ei ole nollakohtia:

$$1 = \exp(0) = \exp(z + (-z)) = \exp(z)\,\exp(-z).$$

Lisäksi edellä olevasta seuraa, että

$$\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}.$$

4.^{o} Jokaiselle kompleksiluvulle z pätee

$$\exp(\overline{z}) = \overline{\exp(z)} :$$

Sarjan määritelmän, Lauseen 1.18 ja Lauseen 2.16 nojalla

$$\begin{aligned}\exp(\overline{z}) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(\overline{z})^k}{k!} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{\overline{z^k}}{k!} = \lim_{n\to\infty} \overline{\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}} \\ &= \overline{\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}} = \overline{\exp(z)}.\end{aligned}$$

5.^{o} Piste iy, missä $y \in \mathbb{R}$, kuvautuu yksikkäkiekon kehälle:

$$\begin{aligned}|\exp(iy)|^2 &= \exp(iy)\,\overline{\exp(iy)} \overset{4.^o}{=} \exp(iy)\exp(\overline{iy}) \\ &= \exp(iy)\,\exp(-iy) \overset{2.^o}{=} \exp(iy + (-iy)) = \exp(0) = 1.\end{aligned}$$

$6.^o$ $|\exp(z)| \leq \exp(|z|)$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$, sillä sarja $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ suppenee itseisesti kaikilla $z \in \mathbb{C}$.

$7.^o$ $|\exp(z)| = \exp(\mathrm{Re}(z)) = e^{\mathrm{Re}(z)}$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}
|\exp(z)|^2 &= \exp(z)\overline{\exp(z)} \overset{4.^o}{=} \exp(z)\exp(\overline{z}) \overset{2.^o}{=} \exp(z+\overline{z}) \\
&= \exp\big(2\,\mathrm{Re}(z)\big) = \exp\big(\,\mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(z)\big) \\
&\overset{2.^o}{=} \big(\exp(\mathrm{Re}(z))\big)\big(\exp(\mathrm{Re}(z))\big) = \big[\exp(\mathrm{Re}(z))\big]^2.
\end{aligned}$$

Luvut $|\exp(z)|$ ja $\exp(\mathrm{Re}(z))$ ovat positiivisia reaalilukuja, ja väite seuraa.

5.2. **Eulerin kaava.** Annoimme 1. Luvussa merkinnän

$$e^{i\alpha} := \cos(\alpha) + i\sin(\alpha), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Silloin $e^{i\alpha}$ oli vain lyhennetty merkintä oikealle puolelle $\cos(\alpha)+i\sin(\alpha)$, kun $\alpha \in \mathbb{R}$. Voimme nyt todistaa, että

$$\exp(i\alpha) = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha),$$

kun $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\exp(i\alpha) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\alpha)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{k!}\alpha^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\alpha^{2k} + i\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\alpha^{2k+1} \\
&= \cos(\alpha) + i\sin(\alpha),
\end{aligned}$$

reaalisten sini- ja kosinifunktioiden Taylorin sarjojen avulla.

Seuraavalla ei ole vastaavuutta reaaliselle eksponenttifunktiolle.

5.3. **Lause.** *Eksponenttifunktiolla on jaksona $2\pi i$ eli kaikilla $z \in \mathbb{C}$ pätee*

$$\exp(z + 2\pi i) = \exp(z).$$

Jos α on jokin toinen jakso eli

$$\exp(z+\alpha) = \exp(z) \quad \textit{kaikilla } z \in \mathbb{C},$$

niin $\alpha = k2\pi i$ jollain $k \in \mathbb{Z}$.

Todistus: Eksponenttifunktion summakaavan $2.^o$ ja Eulerin kaavan nojalla

$$\exp(z+2\pi i) = \exp(z)\ \exp(2\pi i) = \exp(z)(\underbrace{\cos 2\pi}_{=1} + i\underbrace{\sin 2\pi}_{=0}) = \exp(z).$$

Olkoon α jokin toinen jakso. Tälläin jaksollisuuden määritelmän nojalla

$$\exp(\alpha) = \exp(\alpha + 0) = \exp(0) = 1.$$

Siis

$$|\exp(\alpha)| = 1.$$

Jos $\alpha = x + iy$, missä $x \in \mathbb{R}$ ja $y \in \mathbb{R}$, niin

$$\begin{aligned} 1 &= |\exp(\alpha)| = |\exp(x + iy)| = |\exp(x) \exp iy| \\ &= \exp(x)|\exp(iy)| \overset{5.^o}{=} \exp(x), \end{aligned}$$

joka on reaalinen eksponenttifunktio, eli $\exp(x) = e^x \in (0, \infty)$, kun $x \in \mathbb{R}$ ja siis $x = 0$. Siis $\alpha = iy$ ja

$$1 = \exp(iy) = \cos y + i \sin y,$$

jolla ainoat ratkaisut ovat $y = 2\pi n$ jollain $n \in \mathbb{Z}$.

5.4. **Lause.** *Kuvaus* $z \mapsto \exp(z)$ *on bijektio joukolta*

$$\{z : 0 \leq \operatorname{Im} z < 2\pi\} = \Omega$$

joukolle $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

5.5. *Huomautus.* Bijektio on 'one-to-one and onto'.

Todistus. 1. $\exp(z) \neq 0$ kaikilla z. Kuvaus on hyvin määritelty.
2. 'one-to-one': Olkoot $z_1 = x_1 + iy_1 \in \Omega$, $z_2 = x_2 + iy_2 \in \Omega$, missä $x_k \in \mathbb{R}$ ja $y_k \in \mathbb{R}$, kun $k = 1, 2$, siten, että $\exp(z_1) = \exp(z_2)$. On osoitettava, että $z_1 = z_2$.
Koska $\exp(z_1) = \exp(z_2)$, niin

$$e^{x_1} = |\exp(z_1)| = |\exp(z_2)| = e^{x_2},$$

siis $x_1 = x_2$. Lisäksi

$$\begin{aligned} &y_1 + 2\pi n = \arg(\exp(z_1)) = \arg(\exp(z_2)) = y_2 + 2\pi k \,; n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z} \\ &y_1 - y_2 = 2\pi h \,, h \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Koska Ω:n määrittelyn nojalla $0 \leq y_1, y_2 < 2\pi$, niin $y_1 = y_2$.
Siis $z_1 = z_2$.
3. 'onto': $\exp : \Omega \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$ kuvaus. Olkoon $w \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ annettu. On osoitettava, että on olemassa $z \in \Omega$ siten, että $\exp(z) = w$. Olkoon siis $w \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ annettu. Valitaan $\psi \in [0, 2\pi)$ siten, että $\psi = \arg w$. Merkitään $z = \ln|w| + i\psi$.

Silloin $z \in \Omega$ ja

$$\begin{aligned} &\exp(z) = \exp(\ln|w| + i\psi) = e^{\ln|w|}(\cos\psi + i\sin\psi) \\ &= |w|(\cos(\arg w) + i\sin(\arg w)) = w. \end{aligned}$$

$\square$

5.6. **Lause.** *Kuvaus* $z \mapsto \exp(z)$ *kuvaa jokaisen imaginaariakselin suuntaisen suoran* $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = x_0\}$ *ympyrälle* $\{w \in \mathbb{C} : |w| = e^{x_0}\}$ *ja jokaisen reaaliakselin suuntaisen suoran* $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = y_0\}$ *origosta lähtevälle säteelle* $\{z \in \mathbb{C} : \arg z = y_0\}$.

Todistus. Olkoon $z = x_0 + iy$, missä $x_0 \in \mathbb{R}$ on kiinnitetty ja $y \in \mathbb{R}$ muuttuu.

$$z = x_0 + iy \mapsto \exp(z) = \exp(x_0 + iy)$$
$$\exp(x_0 + iy) = \exp(x_0)\exp(iy) = e^{x_0}(\cos y + i \sin y)\,.$$

Siis parametriesitys

$$\begin{cases} u(t) = e^{x_0}\cos t \\ v(t) = e^{x_0}\sin t\,, \end{cases}$$

$t \in \mathbb{R}$, joka on origokeskinen ympyrä säteenä e^{x_0}.
Tai

$$\begin{aligned} &\exp(\{z \in \mathbb{C} \,:\, \operatorname{Re} z = x_0\}) = \{\exp(x_0 + iy) \,:\, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{e^{x_0}(\cos y + i\sin y) \,:\, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{w \in \mathbb{C} \,:\, |w| = e^{x_0}\}\,. \end{aligned}$$

Olkoon $z = x + iy_0$, missä $x \in \mathbb{R}$ muuttuu ja $y_0 \in \mathbb{R}$ on kiinnitetty.

$$z = x + iy_0 \mapsto \exp(z) = \exp(x + iy_0)$$
$$\exp(x + iy_0) = \exp(x)\exp(iy_0) = e^{x}(\cos y_0 + i\sin y_0)\,.$$

Siis parametriesitys

$$\begin{cases} u(t) = e^{t}\cos y_0 \\ v(t) = e^{t}\sin y_0\,, \end{cases}$$

$t \in \mathbb{R}$, joka on puolisuora origosta. Origo ei kuulu puolisuoraan ja puolisuora kulkee pisteen $\cos y_0 + i\sin y_0$ läpi.
Tai

$$\begin{aligned} &\exp(\{z \in \mathbb{C} \,:\, \operatorname{Im} z = y_0\}) = \{\exp(x + iy_0) \,:\, x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{e^{x}(\cos y_0 + i\sin y_0) \,:\, x \in \mathbb{R}\} = \{r(\cos y_0 + i\sin y_0) \,:\, r > 0\} \\ &= \{w \in \mathbb{C}\backslash\{0\} \,:\, \arg w = y_0\}\,. \end{aligned}$$

$\square$

5.3. **Kompleksiset sini- ja kosinifunktiot.** Olkoon $y \in \mathbb{R}$. Silloin

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y$$

ja

$$e^{i(-y)} = \cos(-y) + i\sin(-y) = \cos y - i\sin y,$$

koska kosini on parillinen funktio ja sini on pariton funktio. Kun laskemme puolittain yhteen ja vähennämme puolittain, saamme

$$2\cos y = e^{iy} + e^{-iy} \quad \text{eli} \quad \cos y = \frac{1}{2}(e^{iy} + e^{-iy})$$

ja

$$2i\sin y = e^{iy} - e^{-iy} \quad \text{eli} \quad \sin y = \frac{1}{2i}(e^{iy} - e^{-iy}),$$

missä $y \in \mathbb{R}$. Tässä siis cos ja sin ovat reaaliset kosini- ja sinifunktiot.

Olkoon nyt $z \in \mathbb{C}$. Määritellään kompleksinen sinifunktio

$$\sin\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

asettamalla

$$\sin(z) := \frac{1}{2i}\big(\exp(iz) - \exp(-iz)\big)$$

ja kompleksinen kosinifunktio

$$\cos\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

asettamalla

$$\cos(z) := \frac{1}{2}\big(\exp(iz) + \exp(-iz)\big).$$

Toteamme heti, että reaaliset sini- ja kosinifunktiot eivät tule eri tavalla määritellyiksi kuin ennen.
Olkoon $z = x \in \mathbb{R}$. Lähdemme kompleksisen sinifunktion määrittelystä ja käytämme Eulerin kaavaa, jolla saamme reaalisen sinifunktion pisteessä x:

$$\begin{aligned}
\sin x &= \frac{1}{2i}\big(\exp(ix) - \exp(-ix)\big) \\
&= \frac{1}{2i}\Big(\cos x + i\sin x - \big(\cos(-x) + i\sin(-x)\big)\Big) \\
&= \frac{1}{2i}\big(\cos x + i\sin x - \cos x + i\sin x\big) = \sin x.
\end{aligned}$$

Lähdimme siis kompleksisesta sinifunktiosta pisteessä $x \in \mathbb{R}$ ja päädyimme reaaliseen sinifunktioon pisteessä $x \in \mathbb{R}$.
Vastaavasti voimme todeta, että reaaliselle kosinifunktiolle määritelmä on kunnossa.

5.7. *Huomautus.* Suoraan kompleksisten sini- ja kosinifunktioiden määrittelystä saamme kuuluisan Eulerin kaavan kaikilla $z \in \mathbb{C}$:

$$\exp(iz) = \cos z + i\sin z.$$

5.8. *Huomautus.*

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} .$$

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} .$$

Muistutus: Olkoon $z = x + iy \in \mathbb{C}$, missä $x \in \mathbb{R}$ ja $y \in \mathbb{R}$. Silloin eksponenttifunktion summakaavan $2.^o$ ja Eulerin kaavan perusteella

$$\exp(z) = \exp(x)\, \exp(iy) = e^x \big(\cos y + i \sin y \big).$$

Varoitus: Toisin kuin reaalisessa tapauksessa, kompleksinen sini ja kompleksinen kosini eivät ole rajoitettuja. Esimerkiksi, kun $y \in \mathbb{R}$ ja $y \to +\infty$, niin

$$|\sin(iy)| = |\frac{1}{2i}\big(\exp(i^2 y) - \exp(-i^2 y)\big)| = |\frac{1}{2i}\big(\exp(-y) - \exp(y)\big)|$$
$$= |\frac{1}{2i}(e^{-y} - e^{y})| = |\frac{i}{2}(-e^{-y} + e^{y})| \to \infty.$$

Huomautus: Sinin ja kosinin määrittelyalue on koko $\mathbb{C}$.

Suoraan kompleksisten sini- ja kosinifunktioiden määrittelystä ja eksponenttifunktion yhteenlaskukaavasta saamme yhteenlaskukaavat kompleksisille sini- ja kosinifunktioille:

Olkoot $z_1 \in \mathbb{C}$ ja $z_2 \in \mathbb{C}$. Silloin

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \sin z_2 \cos z_1,$$

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2.$$

5.9. **Määritelmä.** Yhden kompleksimuuttujan kompleksiarvoinen funktio $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ on jaksollinen, jaksona α, jos $f(z + \alpha) = f(z)$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$.

5.10. **Lause.** *Kompleksiluku α on sinifunktion jakso, jos ja vain jos $\alpha = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. Kompleksiluku α on kosinifunktion jakso, jos ja vain jos $\alpha = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.*

Todistus: Jos $\alpha = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$, niin α on sekä sini- että kosinifunktion jakso. Tämä saadaan suoraan sinin ja kosinin märittelystä ja siitä, että eksponenttifunktion jakso on $2\pi i n$, $n \in \mathbb{Z}$.
Olkoon α sinifunktion jakso. Yhteenlaskukaavan nojalla

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + z\right) = \cos z.$$

Siis

$$\cos(z+\alpha) = \sin(\frac{\pi}{2}+z+\alpha)$$
$$= \sin(\frac{\pi}{2}+z) = \cos z\,.$$

Siis α on myös kosinin jakso. Näin ollen Eulerin kaavaa käyttämällä

$$\exp(i(z+\alpha)) = \cos(z+\alpha) + i\sin(z+\alpha)$$
$$= \cos z + i\sin z = \exp(iz)\,.$$

Koska $2\pi in$ on eksponenttifunktion jakso, niin $i\alpha = 2\pi in\,,\ n\in\mathbb{Z}$, eli $\alpha = 2\pi n\,,\ n\in\mathbb{Z}$. Siis sinin ja kosinin jakso on $2\pi n\,,\ n\in\mathbb{Z}$.

5.11. **Lause.** *Olkoon* $z\in\mathbb{C}$. *Silloin*

(1) $\cos z = 0$, *jos ja vain jos* $z = n\pi + \frac{\pi}{2}$,

(2) $\sin z = 0$, *jos ja vain jos* $z = n\pi$,

missä $n\in\mathbb{Z}$.

Todistus: Koska $\cos z = \sin\left(\frac{\pi}{2}+z\right)$, niin riittää todistaa väite (2). Nimittäin, yhteenlaskukaavan nojalla

$$\cos z = 0\,,\ \text{jos ja vain jos}\ \sin\left(\frac{\pi}{2}+z\right) = 0\,,$$
$$\text{jos ja vain jos}\ \frac{\pi}{2}+z = n\pi\,, n\in\mathbb{Z}\,,\ \text{(tämä siis todistetaan)}$$
$$\text{jos ja vain jos}\ z = n\pi - \frac{\pi}{2} = \pi((n-1)+\frac{1}{2})\,.$$

Ensinnäkin $\sin z = 0$, jos ja vain jos

$$\frac{1}{2i}\big(\exp(iz) - \exp(-iz)\big) = 0. \tag{5.1}$$

Kun kerromme yhtälän (5.1) molemmat puolet luvulla

$$2i\exp(iz) \neq 0,$$

niin yhtälä (5.1) on voimassa, jos ja vain jos

$$\exp(iz)\big(\exp(iz) - \exp(-iz)\big) = 0$$

eli

$$\exp(2iz) - \exp(0) = 0$$

eli

$$\exp(2iz) - 1 = 0$$

eli

$$\exp(2iz) = 1 = \exp(0) = \exp(0+2n\pi i)$$

eli

$$2iz = 2n\pi i$$

eli
$$z = n\pi.$$

5.12. **Lause.**
$$\frac{d}{dz}\cos z = -\sin z, \qquad \frac{d}{dz}\sin z = \cos z$$
kaikilla $z \in \mathbb{C}$.

Todistus: Suoraan määritelmästä. Esimerkiksi,
$$\frac{d}{dz}\sin(z) = \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{2i}\big(\exp(iz) - \exp(-iz)\big)\right) = \frac{1}{2i}\big(i\exp(iz) - (-i)\exp(-iz)\big)$$
$$= \frac{1}{2}\big(\exp(iz) + \exp(-iz)\big) = \cos z\,.$$

5.4. **Kompleksiset tangentti- ja kotangenttifunktiot.** Jos $z \neq \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi, n \in \mathbb{Z}$, niin $\cos z \neq 0$ ja voimme määritellä
$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}.$$
Kun asetamme
$$\Omega = \left\{z \in \mathbb{C} : z \neq \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi, n \in \mathbb{Z}\right\},$$
niin funktio
$$\tan \colon \Omega \to \mathbb{C}$$
on kompleksisesti derivoituva jokaisessa alueen Ω pisteessä. Lisäksi
$$D\tan z = 1 + \tan^2 z \quad \text{jokaisella } z \in \Omega.$$
Vastaavasti voimme määritellä
$$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z},$$
kun $z \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}$.

Sini- ja kosinifunktioiden yhteenlaskukaavoista saamme
$$\tan(z_1 + z_2) = \frac{\tan z_1 + \tan z_2}{1 - \tan z_1 \tan z_2},$$
kun $z_1 \in \Omega, z_2 \in \Omega$ ja $z_1 + z_2 \in \Omega$. Siis
$$\tan(z + \pi) = \tan z.$$
Luku π on siis tangenttifunktion jakso. Itse asiassa tangenttifunktion ainoat jaksot ovat $\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

5.13. **Esimerkki.** $\sin i = ?$

$$\sin i = \frac{1}{2i}(\exp(i \cdot i) - \exp(-i \cdot i)) = \frac{i}{2}(e - \frac{1}{e})\,.$$

5.5. **Kompleksiset hyperboliset trigonometriset funktiot.** Määrittelemme kompleksiset hyperboliset sini- ja kosinifunktiot,

$$\sinh\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

ja

$$\cosh\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

asettamalla

$$\sinh z = \frac{1}{2}\big(\exp(z) - \exp(-z)\big)$$

ja

$$\cosh z = \frac{1}{2}\big(\exp(z) + \exp(-z)\big),$$

missä $z \in \mathbb{C}$. Funktioiden jaksoina ovat $2\pi n i, n \in \mathbb{Z}$.
Kompleksiset hyperboliset tangentti- ja kotangenttifunktiot ovat

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z} = \frac{\exp(2z) - 1}{\exp(2z) + 1},$$

kun $z \neq i\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi, n \in \mathbb{Z}$, ja

$$\coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z} = \frac{\exp(2z) + 1}{\exp(2z) - 1},$$

kun $z \neq n\pi i, n \in \mathbb{Z}$. Kompleksiset hyperboliset trigonometriset funktiot eivät pelkästään ole erityisiä kombinaatioita eksponenttifunktiosta, vaan ne liittyvät kompleksisiin trigonometrisiin funktioihin:

$$\begin{aligned}\sinh(iz) &= \frac{1}{2}\big(\exp(iz) - \exp(-iz)\big) = \frac{i}{2i}\big(\exp(iz) - \exp(-iz)\big)\\ &= i\,\sin z\end{aligned}$$

ja

$$\cosh(iz) = \cos z.$$

Toisaalta myäs

$$\sin iz = i \sinh z \quad \text{ja} \quad \cos iz = \cosh z\,:$$

$$\begin{aligned}\sin iz &= \frac{1}{2i}\big(\exp(i^2 z) - \exp(-i^2 z)\big) = \frac{1}{2i}\big(\exp(-z) - \exp(z)\big)\\ &= \frac{i}{2}\big(-\exp(-z) + \exp(z)\big) = \frac{i}{2}\big(\exp(z) - \exp(-z)\big) = i \sinh z\end{aligned}$$

ja

$$\cos iz = \frac{1}{2}\big(\exp(i^2 z) + \exp(-i^2 z)\big) = \frac{1}{2}\big(\exp(-z) + \exp(z)\big) = \cosh z.$$

Kompleksiset hyperboliset funktiot esiintyvät kompleksisten sini- ja kosinifunktioiden reaali- ja imaginaariosien esityksissä:
Olkoon $z = x + iy \in \mathbb{C}$, missä $x \in \mathbb{R}$ ja $y \in \mathbb{R}$. Silloin

$$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y,$$

$$\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y.$$

5.14. **Esimerkki.**

$$\begin{aligned}\cosh(\pi i) &= \frac{\exp(\pi i) + \exp(-\pi i)}{2} \\ &= \frac{\cos \pi + i \sin \pi + \cos(-\pi) + i \sin(-\pi)}{2} = -1\,.\end{aligned}$$

5.6. **Kompleksinen logaritmifunktio.** Reaaliselle eksponenttifunktiolle

$$e^x \,:\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+,\ x \mapsto e^x$$

on olemassa käänteisfunktio

$$\ln\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto \ln x;$$

koska reaalinen eksponenttifunktio on aidosti kasvava, se on bijektio väliltä $(0, \infty)$ reaaliakselille. Kompleksinen eksponenttifunktio ei kuitenkaan ole bijektio $\exp(z) \,: \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, Lause 5.3 ja Lause 5.4.

Sovitaan merkintä ln( ) reaaliselle logaritmifunktiolle. Sovitaan merkintä log( ) kompleksiselle logaritmille.

Etsitään kompleksisen logaritmin $\log(z)$ kaikki mahdolliset arvot. Siis kiinnitetään z ja etsitään w, joka ratkaisee yhtälön $z = \exp(w)$. Jos $z = 0$, niin yhtälöllä ei ole koskaan ratkaisua. Siis $\log(0)$ ei ole määritelty. Olkoon $z \neq 0$. Kirjoitetaan $w = x + iy$, missä $x \in \mathbb{R}$ ja $y \in \mathbb{R}$. Silloin yhtälö on

$$z = e^x \exp(iy)\,.$$

siis $e^x = |z|$ ja $y = \arg(z)$. Siis saamme määrättyä $w = x+iy$, koska nyt tiedämme luvut x ja y annetun luvun z avulla. Siis $w = \ln|z| + i\arg(z)$. Argumentti on määritelty vain luvun 2π monikertoja vaille, 1.28 ja Huomatus 1.36. Siis myös w on moniarvoinen.

5.15. **Määritelmä.** Jos $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, niin luvun z *logaritmi* $\log z$ on jokin luku $w \in \mathbb{C}$ siten, että

$$\exp(w) = z.$$

Jos $z = r\exp(i\varphi), r > 0$, niin

$$\log z = \ln r + i\varphi + n2\pi i = \ln r + i \arg z + n2\pi i\,, n \in \mathbb{Z}\,, \tag{5.2}$$

eli

$$\log z = \ln|z| + i \arg z + n2\pi i\,, n \in \mathbb{Z}\,.$$

5.16. *Huomautus.* Olkoon $z_0 \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Silloin luvulla z_0 on aina logaritmi $\log z_0$, mutta se on määritelty vain luvun $2\pi i$ monikertaa vaille. Kompleksinen logaritmi on 'moniarvoinen'.

5.17. **Esimerkki.**

$$\log(1) = \ln|1| + i2\pi n = i2\pi n\,, n \in \mathbb{Z}\,.$$

$$\log(1+i) = \ln|1+i| + i\arg(i+i) = \ln\sqrt{2} + i(\frac{\pi}{4} + 2\pi k)\,, k \in \mathbb{Z}\,.$$

5.18. **Esimerkki.** $\exp(iz) = 2+\sqrt{3}$. Määrää kaikki mahdolliset ratkaisut z.

$$\begin{aligned}\exp(iz) &= 2+\sqrt{3} = \exp(\log(2+\sqrt{3}))\\ iz &= \ln(2+\sqrt{3}) + 2\pi i n\,, n \in \mathbb{Z}\\ z &= -i\ln(2+\sqrt{3}) + 2\pi n\,, n \in \mathbb{Z}\\ z &= 2\pi n - i\ln(2+\sqrt{3})\,, n \in \mathbb{Z}\,.\end{aligned}$$

5.19. *Huomautus.* Argumentin haaroista:
Argumentin päähaara on nimeltään yleensä argumentti, joka ottaa arvot $(-\pi,\pi]$, Huomautus 1.36. Tämä haara on kuvaus $\mathrm{Arg} : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ ja tämä kuvaus on epäjatkuva negatiivisella reaaliakselilla, Laskuharjoitus 3.1.

Argumentilla on muitakin haaroja ja päähaaraksi voidaan sopia muukin haara: Olkoon $\alpha \in \mathbb{R}$. Määritellään kuvaus

$$\mathrm{Arg}_{(\alpha,\alpha+2\pi]} : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to (\alpha, \alpha+2\pi]\,, z \mapsto \mathrm{Arg}_{(\alpha,\alpha+2\pi]}(z)\,.$$

Erityisesti, $\mathrm{Arg}_{(-\pi,\pi]} = \mathrm{Arg}$, joka on standardi päähaara. Argumentin haara $\mathrm{Arg}_{(\alpha,\alpha+2\pi]}$ on epäjatkuva joukossa $\{z = r\exp(i\alpha) : r \geq 0\}$ eli puolisuoralla $\{z \in \mathbb{C} : \arg(z) = \alpha\}$. Siis argumentin haarat ovat jatkuvia kuvauksia koko tasossa lukuunottamatta yhtä origosta lähtevää puolisuoraa, $\{z \in \mathbb{C} : \arg(z) = \alpha\}$. (Haaralla $\mathrm{Arg}_{(\alpha,\alpha+2\pi)}$ on ns 'branch cut' säteellä $\{z : \alpha = \arg z\}$.)

Kierretään epäjatkuvuusongelma määrittelemällä kuvaus $z \mapsto \mathrm{Arg}(z)$ joukossa

$$\mathbb{C}\backslash\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z \leq 0\}\,.$$

Tällöin saadaan määrittelyjoukossa $\mathbb{C}\backslash\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z \leq 0\}$ jatkuva kuvaus.

Jokainen argumentin haara määrää logaritmin haaran. Argumentin päähaara Arg määrää logaritmin päähaaran, Log,

$$\mathrm{Log}\, z = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}(z)\,.$$

5.20. **Esimerkki.**
$$\mathrm{Log}(1+i) = \ln\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}\,.$$

Argumentin haara $\mathrm{Arg}_{(\alpha,\alpha+2\pi]}$ määrää logaritmin haaran, $\mathrm{Log}_{(\alpha,\alpha+2\pi]}$,
$$\mathrm{Log}_{(\alpha,\alpha+2\pi]}(z) = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}_{(\alpha,\alpha+2\pi]}(z)\,,$$
toisin sanoen $w = \log(z)\,, \alpha < \arg(z) \le \alpha + 2\pi\,.$

5.21. **Esimerkki.**
$$\mathrm{Log}_{(\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{2}]}(1+i) = \ln\sqrt{2} + i\frac{9\pi}{4}\,.$$

Logaritmin haara on epäjatkuva kuvaus puolisuoralla $\{z = r\exp(i\alpha)\, : r \ge 0\}$ eli puolisuoralla $\{z \in \mathbb{C}\, : \arg(z) = \alpha\}$. Epäjatkuva funktio ei ole analyyttinen. Funktion analyyttisyys on määritelty avoimessa joukossa. Siis olemme kiinnostuneita logaritmin haarasta joukossa
$$\mathbb{C}\backslash\{z = r\exp(i\alpha)\, : r \ge 0\}\,.$$

Logaritmin haara $\mathrm{Log}_{(\alpha,\alpha+2\pi]}$ kuvaa alueen
$$\mathbb{C}\backslash\{z = r\exp(i\alpha)\, : r \ge 0\}$$
alueelle
$$\{w \in \mathbb{C}\, : \alpha < \mathrm{Im}(w) < \alpha + 2\pi\}\,.$$

Merkinnöistä: Merkintöjen Log ja $\mathrm{Log}_{(\alpha,\alpha+2\pi)}$ tilalla voidaan lyhyesti kirjoittaa log, kun asiayhteydestä on selvää, mikä argumentin haara on kyseessä.

Logaritmin haaran määrittely voitaisiin muotoilla myös seuraavasti, jolloin epäjatkuvuus suljettaisiin heti pois.

5.22. **Määritelmä.** Olkoon
$$\Omega = \{z = r\exp(i\theta)\, : r > 0\,, \alpha < \theta < \alpha + 2\pi\}\,.$$
Jos määritellään
$$\log z = \ln r + i\theta\,,$$
missä r ja θ (eli pari (r,θ)) ovat yhtälön $z = r\exp(i\theta)$ yksikäsitteinen ratkaisu siten, että $r > 0$ ja $\theta \in (\alpha, \alpha+2\pi)$, niin sanomme, että funktio $z \mapsto \log z$ on logaritmin haara.

5.23. *Huomautus.* Tähän voit törmätä kirjallisuudessa. Termistä logaritmin päähaara: Olkoon α kiinnitetty siten, että $-2\pi \le \alpha \le 0$, niin on ollut tapana viitata funktioon
$$\log(r\exp(i\theta)) = \ln r + i\theta\,,$$
kun $r > 0$ ja $\alpha < \theta < 2\pi + \alpha$ logaritmin päähaarana. Meillä päähaaralle $\alpha = -\pi\,.$

5.24. **Lause.** *Olkoon*

$$\Omega = \{z = r\exp(i\theta) \, : r > 0\,, \alpha < \theta < \alpha + 2\pi\}\,,$$

missä $\alpha \in \mathbb{R}$ *on kiinnitetty.*
(1) $\log : \Omega \to \mathbb{C}$ *analyyttinen.*
(2) $\log'(z) = \frac{1}{z}\,, \forall z \in \Omega\,.$
(3) $\log(\Omega) = \{w \, : \alpha < \operatorname{Im} w < \alpha + 2\pi\}\,.$
(4) $\exp(\log(z)) = z \ \forall z \in \Omega\,.$
(5) *Jos* $z_1, z_2, z_1z_2 \in \Omega\,,$ *niin*

$$\log(z_1z_2) = \log z_1 + \log z_2 + n2\pi i, \quad \textit{jollakin } n \in \mathbb{Z}\,.$$

Edellisessä lauseessa

$$\Omega = \mathbb{C}\backslash\{z : \arg(z) = \alpha\}\,.$$

5.25. **Esimerkki.** Olkoon $\arg z \in (0, 2\pi)$. (Siis $\alpha = 0$ alueen Ω määrittelyssä.) Silloin

$$\log((-1-i)(1-i)) = \log(-2) = \ln 2 + \pi i\,,$$

mutta

$$\log(-1-i) = \ln\sqrt{2} + i\frac{5\pi}{4}\,,$$
$$\log(1-i) == \ln\sqrt{2} + i\frac{7\pi}{4}$$

ja siis

$$\log(-1-i) + \log(1-i)) = \log(-2) = 2\ln\sqrt{2} + i\left(\frac{5\pi + 7\pi}{4}\right)$$
$$= \ln 2 + \pi i + 2\pi i\,.$$

Siis kun $z_1 = -1 - i$ ja $z_2 = 1 - i$, niin $\log z_1z_2$ eroaa luvusta $\log z_1 + \log z_2$ luvulla $2\pi i$.

5.7. **Yleinen potenssifunktio.** Jos $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ja $a \in \mathbb{C}$, niin määrittelemme

$$z^a = \exp(a\log z).$$

5.26. *Huomautus.* Koska

$$\log z = \ln|z| + i\arg z + n2\pi i, \ n \in \mathbb{Z},$$

niin

$$z^a = \exp(a\log z) = \exp(a(\ln|z| + i\arg z + n2\pi i))$$
$$= |z|^a \exp(ia(\arg z + n2\pi))\,,$$

missä $n \in \mathbb{Z}$.

Jos yleisestä potenssifunktiosta halutaan yksiarvoinen funktio, niin logaritmille valitaan haara ja se määrää yleiselle potenssifunktiolle haaran.

Olkoon

$$\Omega = \{z = r\exp(i\theta) \,:\, r > 0\,, \theta_0 < \theta < \theta_0 + 2\pi\}\,.$$

Olkoon $\alpha \in \mathbb{C}$. Määrittelemme kuvauksen $z \mapsto z^\alpha$ alueessa Ω siten, että

$$z^\alpha = \exp(\alpha \log z).$$

Saatu funktio on yleisen potenssifunktion z^α haara.

5.27. **Lemma.** *Olkoon*

$$p_\alpha : \Omega \to \mathbb{C}\,, p_\alpha(z) = z^\alpha\,.$$

Silloin p_α on analyyttinen alueessa Ω ja

$$p'_\alpha(z) = \alpha p_{\alpha-1}(z)\,.$$

5.28. *Huomautus.* Jos $\alpha \in \mathbb{Z}$ ja $z = r\exp(i\theta)$, niin

$$z^\alpha = r^\alpha \exp(i\alpha\theta)\,.$$

Luvulla z^α on siis vain yksi arvo silloin.

5.29. *Huomautus.* On ehkä parempi käsitellä potenssifunktiota z^α kirjoittamalla se $\exp(\alpha \log z))$.

Todistus. Muistutus: $D(f \circ g)(z) = f'(g(z))g'(z)$. Koska

$$p_\alpha(z) = z^\alpha = \exp(\alpha \log z)\,,$$

niin

$$\begin{aligned} p'_\alpha(z) &= D\exp(\alpha \log z) = (\exp(\alpha \log z))\alpha\frac{1}{z} \\ &= \alpha\frac{\exp(\alpha \log z)}{z} = \alpha\frac{z^\alpha}{z} = \alpha z^{\alpha-1}\,. \end{aligned}$$

□

5.30. **Esimerkki.** Määrää kompleksisen potenssin z^i haara, joka on jatkuva vasemmassa puolitasossa $\{z|\,\mathrm{Re}(z) < 0\}$ ja jonka antama kuva luvusta -1 on $e^{5\pi}$.

5.31. **Esimerkki.** a) Määrää luvun i^π kaikki arvot.

$$\begin{aligned} i^\pi &= \exp(\pi \log i) = \exp\left(\pi\left(\ln 1 + i\frac{\pi}{2} + 2n\pi i\right)\right) \\ &= \exp\left(\pi^2 i\left(\frac{1}{2} + 2n\right)\right),\ n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Erityisesti, jos $n = 0$,

$$i^\pi = \cos\frac{\pi^2}{2} + i\sin\frac{\pi^2}{2}.$$

b) Määrää luvun i^i kaikki arvot.

$$\begin{aligned} i^i &= \exp(i\log i) = \exp\left(i\left(\ln 1 + i\frac{\pi}{2} + 2n\pi i\right)\right) \\ &= \exp\left(-\pi\left(\frac{1}{2} + 2n\right)\right), n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$