KOMPLEKSIANALYYSI I KURSSI
SYKSY 2014

RITVA HURRI-SYRJÄNEN

7. Integraalilauseita

7.1. **Goursatin lemma.** (Edouard Jean-Baptiste Goursat, 1858-1936, ranskalainen matemaatikko) Olkoon R tason suljettu suorakaide, jonka sivut ovat koordinaattiakselien suuntaiset. Olkoon f suorakaiteen avoimessa ympï¿½ristï¿½ssï¿½ analyyttinen funktio. Jos ∂R on suorakaiteen R positiivisesti suunnistettu reuna, niin

$$\int_{\partial R} f(z)dz = 0.$$

Todistus: Olkoon L_1 suorakaiteen R vaakasï¿½rmï¿½n pituus ja olkoon L_2 suorakaiteen R pystysï¿½rmï¿½n pituus.

Merkitsemme

$$I = \int_{\partial R} f(z)dz.$$

Jaetaan R neljï¿½ï¿½n yhtenevï¿½ï¿½n suorakaiteeseen R_k, $k = 1, 2, 3, 4$. Olkoot ∂R_k niiden positiivisesti suunnistetut reunapolut (eli niiden polkujen jï¿½ljet, joiden jï¿½lkenï¿½ on reuna). Nyt

$$I = \int_{\partial R} f(z)dz = \sum_{k=1}^{4} \int_{\partial R_k} f(z)dz,$$

koska suorakaiteen R sisï¿½pisteissï¿½ kulkevat suorakaiteiden R_k reunapolkujen osat kumoavat toisensa.
Nyt kolmioepï¿½yhtï¿½lï¿½n nojalla jollekin nï¿½istï¿½ pikkusuorakaiteista R_k, $k = 1, 2, 3, 4$, on

$$|I| \leq 4\Big|\int_{\partial R_k} f(z)dz\Big|.$$

Merkitsemme tï¿½tï¿½ suorakaidetta R^1 ja merkitsemme

$$\int_{\partial R^1} f(z)dz =: I_1.$$

Date: 31102014.

Jos sovellamme tehtyï¿½ pï¿½ï¿½ttelyï¿½ suorakaiteen R sijasta suorakaiteeseen R^1, niin lï¿½ydï¿½mme suorakaiteen R^2, jolle

$$|I_1| \leq 4\Big|\int_{\partial R^2} f(z)dz\Big|.$$

Jatkamalla nï¿½in saamme jonon sisï¿½kkï¿½isiï¿½, yhdenmuotoisia suorakaiteita R^j, $j = 1, 2, \ldots$, siten, ettï¿½

$$\int_{\partial R^j} f(z)dz =: I_j$$

ja

(1) $$|I| \leq 4|I_1| \leq 4^2|I_2| \leq \ldots \leq 4^j|I_j| \leq 4^{j+1}|I_{j+1}| \leq \ldots.$$

Suorakaiteen R^j sï¿½rmien pituudet ovat $2^{-j}L_1$ ja $2^{-j}L_2$. Osoitamme, ettï¿½ leikkaus

$$R^\infty = \cap R^j$$

sisï¿½ltï¿½ï¿½ tï¿½smï¿½lleen yhden pisteen.
Koska joukon R^j halkaisija on

$$2^{-j}\sqrt{L_1^2 + L_2^2}\,,$$

niin joukon R^j halkaisija suppenee kohti lukua 0, kun $j \to \infty$, ja siis leikkaus R^∞ sisï¿½ltï¿½ï¿½ korkeintaan yhden pisteen.

Olkoon $z_j \in R^j$, $j = 1, 2, \ldots$, mielivaltaisesti valittu piste. Koska $z_k \in R^j$, kun $k \geq j$, niin (z_k) on Cauchy-jono ja siis on olemassa raja-arvo

$$z^* = \lim_{k\to\infty} z_k.$$

Koska jokainen suorakaide R^k on suljettu, niin z^* sisï¿½ltyy jokaiseen suorakaiteeseen R^k ja siten myï¿½s niiden leikkaukseen.

Olkoon $\varepsilon > 0$ mielivaltaisesti valittu ja $\delta > 0$ niin pieni, ettï¿½ funktio f on analyyttinen kiekossa $\mathbb{D}(z^*, \delta)$. Silloin

(2) $$|f(z) - f(z^*) - f'(z^*)(z - z^*)| < \varepsilon|z - z^*|,$$

kun $|z - z^*| < \delta$.

Voidaan valita indeksi j niin suureksi, ettï¿½

$$R^j \subset \mathbb{D}(z^*, \delta).$$

Nyt siis j on kiinnitetty.

Koska vakiofunktiolla 1 on integraalifunktio z, ja funktiolla z on integraalifunktio $\frac{1}{2}z^2$, niin Integraalifunktion karakterisaatiolauseen nojalla

$$\int\limits_{\partial R^j} dz = 0 \quad \text{ja} \quad \int\limits_{\partial R^j} z dz = 0.$$

Siis

$$\begin{aligned} |I_j| &= \Big| \int\limits_{\partial R^j} f(z) dz \Big| \\ &= \Big| \int\limits_{\partial R^j} f(z) dz - f(z^*) \int\limits_{\partial R^j} dz - f'(z^*) \int\limits_{\partial R^j} z dz + f'(z^*) z^* \int\limits_{\partial R^j} dz \Big| \\ &= \Big| \int\limits_{\partial R^j} \big(f(z) - f(z^*) - f'(z^*)(z - z^*) \big) dz \Big|. \end{aligned}$$

Olemme siis kiinnittäneet suorakaiteen $R^j \subset \mathbb{D}(z^*, \delta)$. Suorakaiteelle R^j

$$\text{length}(\partial R^j) = 2\big(2^{-j} L_1 + 2^{-j} L_2\big) = 2^{-j+1}(L_1 + L_2).$$

Koska $z^* \in R^j$, niin kaikilla $z \in R^j$

$$|z - z^*| \leq 2^{-j} \sqrt{L_1^2 + L_2^2}\,.$$

Epï¿½yhtï¿½lï¿½n (2) ja Arviolemman nojalla

$$\begin{aligned} |I_j| &\leq \int\limits_{\partial R^j} |f(z) - f(z^*) - f'(z^*)(z - z^*)||dz| \\ &\leq \varepsilon \int\limits_{\partial R^j} |z - z^*||dz| \leq \varepsilon 2^{-j} \sqrt{L_1^2 + L_2^2}\, 2^{-j+1}(L_1 + L_2) \\ &= \varepsilon 2^{-2j} 2(L_1 + L_2) \sqrt{L_1^2 + L_2^2}\,. \end{aligned}$$

Kohdan (1) nojalla

$$|I| \leq 4^j |I_j| \leq \varepsilon 4^j 2^{-2j} 2(L_1 + L_2) \sqrt{L_1^2 + L_2^2} = 2\varepsilon (L_1 + L_2) \sqrt{L_1^2 + L_2^2}\,.$$

Koska $\varepsilon > 0$ oli mielivaltaisesti valittu, niin $I = 0$.

7.2. **Cauchyn-Goursatin teoreema avoimessa kiekossa.** Olkoon f avoimessa kiekossa $\mathbb{D}(z_0, R)$ analyyttinen funktio. Tï¿½llï¿½in avoimen kiekon jokaisella suljetulla paloittain C^1-polulla γ pï¿½tee

$$\int_\gamma f(z) dz = 0.$$

7.3. *Huomautus.* (1) Cauchyn-Goursatin teoreeman oletuksessa on oleellista, että meillä on avoin kiekko. Teoreema ei pï¿½de kaikissa alueissa.
Esimerkki: Funktio $f\colon \mathbb{C}\setminus\{0\}\to\mathbb{C}$, $f(z)=\frac{1}{z}$, on analyyttinen punkteeratussa kompleksitasossa $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, joka on avoin ja yhtenï¿½inen, mutta ei yhdesti yhtenï¿½inen. Funktion f integraali yli yksikkökiekon reunan positiiviseen kiertosuuntaan on

$$\int\limits_{\partial^+\mathbb{D}(0,1)} f(z)dz = 2\pi i \neq 0.$$

Siis Cauchyn-Goursatin teoreema ei pï¿½de alueessa $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

(2) Jos valitaan alueeksi avoimen kiekon sijasta ylempi puolitaso, niin Cauchyn-Goursatin teoreeman vï¿½ite pï¿½tee. Keskipisteen sijasta valitaan $z_0 = i$.

7.4. **Goursatin lemman yleistys.** Olkoon R suljettu suorakaide, jonka sivut ovat koordinaattiakseleiden suuntaiset. Olkoon U suorakaiteen avoin ympï¿½ristï¿½ ja $w\in R$. Jos funktio f on jatkuva joukossa R ja analyyttinen joukossa $U\setminus\{w\}$, niin

$$\int_{\partial R} f(z)dz = 0.$$

7.5. **Cauchyn-Goursatin integraaliteoreeman yleistys.** Olkoon kompleksiarvoinen funktio f jatkuva kompleksitason avoimessa kiekossa $\mathbb{D}(z_0,R)$. Olkoon $w\in\mathbb{D}(z_0,R)$. Jos funktio f on analyyttinen alueessa $\mathbb{D}(z_0,R)\setminus\{w\}$, niin jokaiselle kiekossa $\mathbb{D}(z_0,R)$ paloittain jatkuvasti derivoituvalle suljetulle polulle γ pätee

$$\oint_\gamma f(z)dz = 0.$$

Todistus: Todistus on melkein samanlainen kuin Cauchyn-Goursatin integraaliteoreema avoimessa kiekossa.

7.6. **Cauchyn integraalikaavan lokaali muoto.** Olkoot A kompleksitason avoin joukko, $f\colon A\to\mathbb{C}$ analyyttinen funktio ja $\overline{\mathbb{D}}(z_0,r)$ joukon A osajoukko. Olkoon $\partial^+\mathbb{D}$ kiekon $\mathbb{D}(z_0,r)$ positiivisesti suunnistettu reuna. Tï¿½llï¿½in

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial^+\mathbb{D}} \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi$$

kaikilla $z\in\mathbb{D}(z_0,r)$.

7.7. *Huomautus.* Funktion arvot kiekon kehï¿½llï¿½ mï¿½ï¿½rï¿½ï¿½vï¿½t funktion arvot kiekon sisï¿½llï¿½.

Esimerkki. Mï¿½ï¿½rï¿½ï¿½

$$\oint_{|z|=1} \frac{\exp(z)}{z} dz.$$

Ratkaisu: Koska funktio $z \mapsto \exp(z)$ on analyyttinen koko kompleksitasossa ja $z = 0$, saamme

$$\oint_{|z|=1} \frac{\exp(z)}{z} dz = 2\pi i \exp(0) = 2\pi i.$$

Cauchyn integraalikaavan todistus: Asetamme

$$F(\xi) = \begin{cases} \dfrac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z}, & \text{kun } \xi \neq z \\ \\ f'(z), & \text{kun } \xi = z. \end{cases}$$

Tï¿½llï¿½in funktio F on analyyttinen joukossa $A \setminus \{z\}$ ja jatkuva joukossa A. Koska $\overline{\mathbb{D}}(z_0, r) \subset A$ ja joukko A on avoin, niin on olemassa avoin kiekko D_1 siten,ettï¿½

$$\overline{\mathbb{D}}(z_0, r) \subset D_1 \subset A.$$

Cauchyn-Goursatin integraaliteoreeman yleistyksen nojalla

$$0 = \int_{\partial^+\mathbb{D}(z_0,r)} F(\xi) d\xi = \int_{\partial^+\mathbb{D}(z_0,r)} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} d\xi.$$

Siis

$$f(z) \int_{\partial^+\mathbb{D}(z_0,r)} \frac{d\xi}{\xi - z} = \int_{\partial^+\mathbb{D}(z_0,r)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi. \tag{3}$$

Koska polun $\gamma_0\colon [0, 1] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = z_0 + r \exp 2\pi i t$, jälki on $\partial^+\mathbb{D}(z_0, r)$, niin saamme

$$\begin{aligned} \int\limits_{\partial^+\mathbb{D}(z_0,r)} \frac{d\xi}{\xi - z} &= \int_0^1 \frac{r 2\pi i \exp 2\pi i t}{z_0 + r \exp 2\pi i t - z} dt = 2\pi i \int_0^1 \frac{1}{1 + \frac{z_0 - z}{r \exp 2\pi i t}} dt \\ &= 2\pi i \int_0^1 \frac{1 + \frac{z_0 - z}{z} \exp(-2\pi i t)}{1 + \frac{z_0 - z}{r} \exp(-2\pi i t)} dt - 2\pi i \int_0^1 \frac{\frac{z_0 - z}{r} \exp(-2\pi i t)}{1 + \frac{z_0 - z}{r} \exp(-2\pi i t)} dt \\ &= 2\pi i - \int_0^1 \frac{2\pi i \frac{(z_0 - z)}{r} \exp(-2\pi i t)}{1 + \frac{z_0 - z}{r} \exp(-2\pi i t)} dt\,. \end{aligned}$$

Merkitsemme

$$\gamma_1(t) = \frac{z_0 - z}{r} \exp(-2\pi i t),\ t \in [0,1]$$

ja silloin

$$\gamma_1'(t) = -2\pi i \frac{(z_0 - z)}{r} \exp(-2\pi i t).$$

Siis

$$\int_0^1 \frac{\gamma_1'(t)}{1 + \gamma_1(t)}\, dt = \int_{\gamma_1} \frac{d\xi}{1 + \xi}\,.$$

Koska $|z_0 - z| < r$, niin γ_1 on suljettu C^1-polku yksikkï¿½kiekossa. Funktio

$$\xi \mapsto \frac{1}{1 + \xi}$$

on analyyttinen avoimessa yksikkï¿½kiekossa $\mathbb{D}(0,1)$, joten Cauchyn-Goursatin integraaliteoreeman avoimessa kiekossa perusteella

$$\int_{\gamma_1} \frac{d\xi}{1 + \xi} = 0.$$

Siis

$$\int\limits_{\partial^+\mathbb{D}} \frac{d\xi}{\xi - z} = 2\pi i - 0 = 2\pi i.$$

Nï¿½in ollen yhtï¿½lï¿½stï¿½ (3) saamme

$$f(z) 2\pi i = \int\limits_{\partial^+\mathbb{D}} \frac{f(z)}{\xi - z} d\xi$$

eli vï¿½itteen.

Cauchyn integraalikaavan lokaalia muotoa voidaan kï¿½yttï¿½ï¿½ laskemaan integraaleja, joita muutoin on vaikea laskea.

7.8. **Esimerkki.** (1) Olkoon $\overleftarrow{\gamma}$ polku, joka antaa yksikkï¿½kiekon kehï¿½n negatiiviseen kiertosuuntaan eli myï¿½tï¿½pï¿½ivï¿½ï¿½n. Tï¿½llï¿½in

$$\oint_{\overleftarrow{\gamma}} \frac{\exp(z)}{z} dz = -2\pi i \exp(0) = -2\pi i.$$

(2) Mï¿½ï¿½rï¿½ï¿½ integraali

$$\oint_{|z|=1} \frac{\exp(z)}{z(z-2)} dz.$$

Ratkaisu:

$$\oint_{|z|=1} \frac{\exp(z)}{z(z-2)} dz = \oint_{|z|=1} \frac{\frac{\exp(z)}{z-2}}{z} dz = \frac{2\pi i \exp(0)}{0-2} = -\pi i,$$

koska funktio $z \mapsto \frac{\exp(z)}{z-2}$ on analyyttinen kiekossa $\mathbb{D}(0, \frac{3}{2})$.