

KURSSIPÄIVÄKIRJA/RHS

3.9.2015

Tervetuloa kurssille.

Kompleksianalyysi on analyysia kompleksiluvuilla.

Otetaan tuttu reaalitaso $(\mathbb{R}^2, +)$ varustettuna tavallisella tason vektoreiden yhteenlaskulla ja reaalillisella skalaarilla kertomisella. Kompleksitaso on $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$, missä reaalitason alkioille on määritelty kertolasku \cdot siten, että $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ on kunta.

Kompleksiluvut ovat kompleksitason alkioita.

Kompleksianalyysi I on kompleksiarvoisten kompleksimuuttujan funktioiden analyysia.

Motivaatio kurssille.

Kompleksianalyysia tarvitaan.

Lyhin tie reaalianalyysin ongelman ja sen ratkaisun välillä kulkee joskus kompleksianalyysin kautta.

Kirjallisuutta.

Kertokaa painovirheet vaikka e-maililla.

Luennot Luvun 1 alusta Kolmioepäyhtälöön asti.

4.9.2015

Kolmioepäyhtälön todistus, argumentti, moduli-argumentti-esitys, kertolaskun geometrinen merkitys, De Moivre'n kaavat ja kaavojen sovelluksia, erityisesti binomiyhtälön ratkaiseminen. Luku 1 loppuun.

10.9.2015

Kertauksena kaksi esimerkkiä luvun argumentista ja De Moivre'n kaavojen sovelluksista. Kompleksitason topologiaa. Lukujonon raja-arvosta. Funktion raja-arvosta. Funktion jatkuvuuteen asti.

11.9.2015

Funktion jatkuvuudesta.

Funktion kompleksinen devivaatta; analyttinen funktio; esimerkkejä analyttisistä funktioista.

Esimerkki $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f : z \mapsto \bar{z}$ ja toisaalta $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x, -y)$.

Algebrallisiin derivoimissääntöihin asti.

Date: December 8, 2015.

Key words and phrases. Complex numbers, Complex valued functions, Analytic functions.

17.9.2015

Algebrallisista derivoimissäännöistä. Todistimme osan säännöistä.

Lisäesimerkkejä, joissa hyödynnetään derivoimissääntöjä.

Cauchyn-Riemannin yhtälöiden johtaminen.

Funktion reaalisen differentioituvuuden ja Cauchyn-Riemannin yhtälöiden avulla kompleksisen derivaatan olemassaolon karakterisointilause ja lauseen toisen suunnan todistus.

18.9.2015

Funktion reaalisen differentioituvuuden ja Cauchyn-Riemannin yhtälöiden avulla kompleksisen derivaatan olemassaolon karakterisointilause ja lauseen todistus.

Karakterisaatio analyyttiselle funktiolle.

Esimerkkejä.

Kertausta: Tapoja osoittaa, että f ei ole kompleksisesti derivoituva.

24.9.2015

Kompleksitermisistä sarjoista.

Kompleksitermisistä potenssisarjoista.

Esimerkkejä.

Abelin lause ja korollaari todistuksineen.

25.9.2015

Kompleksitermisen potenssisarjan suppenemissäde.

Abelin lauseen korollaareja.

Cauchyn–Hadamardin kaava.

Esimerkkejä.

1.10.2015

$\limsup x_k$ kertaus.

Kompleksiterminen potenssisarja esittää suppenemiskiekossaan analyyttistä funktiota ja sarja voidaan derivoida termeittäin. Lisäksi tämän tuloksen korollaareja.

Kompleksinen eksponenttifunktio ja sen perusominaisuuksia.

2.10.2015

Lisää kompleksisen eksponenttifunktion ominaisuuksista.
Kompleksisista trigonometrisista funktioista.
Kompleksisista hyperbolisista funktioista.

8.10.2015

Kompleksinen logaritmi.
Kompleksinen potenssifunktio.

9.10.2015

Sovelluksia kompleksiseen logaritmiin ja kompleksiseen potenssifunktioon liittyen.
Esimerkkejä logaritmin haaroihin ja kompleksisen potenssifunktion haaroihin liittyen.

15.10.2015

Polku, vastapolku, suljetun polun suunnistus, tulopolku, C^1 -polku, paloittain C^1 -polku.
Polun uudelleen parametrisointi.
Integraali yli reaalisen välin.
Polkuintegraali: integraali pitkin polkua.
Esimerkkejä.

16.10.2015

Integraalin invarianssi eli polun uudelleen parametrisointi ei muuta integraalin arvoa.
Tekniset lemmat: integraalin lineaarisuus, tulopolun integraali ja vastapolun integraali.
Integraali polun kaarenpituuden suhteen ja sen perusominaisuudet.
Arviolemma.

Kurssikoe on tiistaina 20.10.2015 klo 13–15.
Kurssikoealueen muodostavat Luvut 1–5.

29.10.2015

Integraalifunktion peruslauseita.
Integraalifunktion karakterisaatiolause.
Lisäesimerkkejä.

30.10.2015

Cauchyn-Goursatin lemma.
Cauchyn-Goursatin teoreema, kerkisimme vain osan todistuksesta.
Esimerkki.

5.11.2015

Cauchyn-Goursatin teoreeman todistus loppuun.
Cauchyn lokaali integraalikaava.
Esimerkkejä.

6.11.2015

Analyttisen funktion lokaali sarjaesityslause.
Lokaalin sarjaesityksen korollaareja: Korollaari 1: Jokainen analyttinen funktio on äärettömän monta kertaa derivoituva. Korollaari 2: Yleistetty Cauchyn integraalikaava.
Lisäesimerkkejä.
Moreran lause.
Liouvillen lause.
Polynomisen kasvun lause.

12.11.2015

Algebran peruslause.
Analyttisen funktion nollakohdista.
Gaussin keskiarvolause. Kertaus.
Maksimiperiaatteen heikko muoto.
Maksimiperiaatteen vahva muoto.
Lisäesimerkki.

13.11.2015

Minimiperiaatteesta.
Schwarzin lemma.
Lisäesimerkki.
Sykleistä.

19.11.2015

Kierroslukulemma.

Lisäesimerkkejä.

Komponenttilause.

Cauchyn integraalikaavan globaali versio (formulointi ja toisen osan todistus) ja sen korollaareja.

20.11.2015

Cauchyn integraalikaavan globaalin version todistus.

Deformaatiolause.

Esimerkkejä.

26.11.2015

Laaennetusta kompleksitasosta.

Esimerkkejä Möbius-kuvauksista: siirto, venytys/kutistus, kierto, inversio.

Möbius-kuvausten määrittely.

Möbius-kuvausten perusominaisuuksia.

27.11.2015

Möbius-kuvauksista.

Kaksoissuhde on Möbius-invariantti.

Möbius-kuvaus kuvaa yleistetyt ympyrät yleistetyiksi ympyröiksi.

Esimerkkejä.

3.12.2015

Lisää Möbius-kuvauksista.

Konformikuvauksista.

4.12.2014

Konformikuvaustehtävistä.

Kurssikoe on maanantaina 14.12.2015 klo 13–15.

Kurssikoealueen muodostavat Luvut 6–11.

Kiitos erinomaisesta kurssi-ilmapiiiristä luennoilla!