Suurten poikkeamien teorian laskuharjoitus 7, 16.12.2015

1. Oletetaan, että $\{X_n\}$ toteuttaa suurten poikkeamien periaatteen $\mathbb{R}^d$:ssä vauhtifunktiolla Λ^* (Gärtner-Ellisin lauseen vauhtifunktio). Olkoon A $d' \times d$-matriisi. Osoita, että $\{AX_n\}$ toteuttaa suurten poikkeamien periaatteen eräällä konveksilla vauhtifunktiolla.

2. Oletetaan, että $\{X_n\}$ toteuttaa suurten poikkeamien periaatteen $\mathbb{R}^d$:ssä konveksilla vauhtifunktiolla I. Olkoon $Y_n = nX_n$ ja

$$\Lambda(t) = \limsup n^{-1} \log \mathbb{E}\left(e^{\langle t, Y_n \rangle}\right), \quad \forall t \in \mathbb{R}^d.$$

Oletetaan, että $\Lambda(t) < \infty$, $\forall t \in \mathbb{R}^d$. Osoita, että $I = \Lambda^*$.

3. Oletetaan, että $\{X_n\}$ toteuttaa suurten poikkeamien periaatteen $\mathbb{R}^d$:ssä vauhtifunktiolla I. Olkoon

$$\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d) = \{f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} | f \text{ jatkuva ja rajoitettu}\}.$$

Merkitään

$$\Lambda_f = \limsup n^{-1} \log \mathbb{E}\left(e^{nf(X_n)}\right), \quad \forall f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d).$$

Osoita, että

$$I(x) \geq \sup\{f(x) - \Lambda_f | f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d)\}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

4. Olkoon $Y_1, Y_2, \ldots$ jono satunnaismuuttujia. Oletetaan, että

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \log \mathbb{E}\left(e^{tY_n}\right) = t^2 - t$$

kaikilla $t \in \mathbb{R}$. Määrää raja-arvo

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \log \mathbb{E}\left(e^{-Y_n^2/n}\right).$$

5. Olkoon $\{X_n\}$ $\mathbb{R}^d$-arvoinen stokastinen prosessi ja I vauhtifunktio. Oletetaan, että kaikilla avoimilla joukoilla $G \subseteq \mathbb{R}^d$,

$$\limsup n^{-1} \log \mathbb{P}(X_n \in G) \geq - \inf_{x \in G} I(x).$$

Olkoon $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d'}$ jatkuva funktio. Osoita, että kaikilla avoimilla joukoilla $G' \subseteq \mathbb{R}^{d'}$,

$$\limsup n^{-1} \log \mathbb{P}(f(X_n) \in G') \geq - \inf_{y \in G'} I'(y),$$

missä I' on kontraktioperiaatteen mukainen vauhtifunktio.