Suurten poikkeamien teorian laskuharjoitus 6, 25.11.2015

1. Olkoon Y_n Poisson-jakautunut parametrilla $\lambda_n n$, missä $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ ovat positiivisia reaalilukuja ja $\lim \lambda_n = \lambda > 0$. Osoita, että $\{n^{-1}Y_n\}$ toteuttaa suurten poikkeamien periaatteen ja määrää vauhtifunktio.

2. Olkoot $\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots$ riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia. Oletetaan, että eräille $a_1 < \cdots < a_d \in \mathbb{R}$,

$$p_i = \mathbb{P}(\xi = a_i) > 0, \quad i = 1, \ldots, d,$$

missä $p_1 + \cdots + p_d = 1$. Olkoon

$$Y_{ni} = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}(\xi_k = a_i), \quad i = 1, \ldots, d \quad \text{ja} \quad Y_n = (Y_{n1}, \ldots, Y_{nd}),$$

sekä $X_n = n^{-1}Y_n$ (ns. empiirinen jakauma, X_n:n i. komponentti kertoo arvon a_i suhteellisen osuuden jonossa $\xi_1, \ldots, \xi_n$). Määrää prosessiin $\{Y_n\}$ liittyvä rajafunktio Λ. Toteuttaako $\{X_n\}$ suurten poikkeamien periaatteen vauhtifunktiolla Λ^*.

Vastaus: $\Lambda(t) = \log \sum_{i=1}^{d} p_i e^{t_i}$, kun $t = (t_1, \ldots, t_d)$.

3. (jatkoa) Pätee

$$\Lambda^*(x) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{d} x_i \log \frac{x_i}{p_i}, & \text{jos } x = (x_1, \ldots, x_d),\ x_i \geq 0, \forall i,\ \sum_{i=1}^{d} x_i = 1, \\ +\infty & \text{muuten} \end{cases}$$

(sopimus: $0 \log 0 = 0$). Todista tulos tapauksessa $x_i \in (0,1)$, $\forall i$, $\sum_{i=1}^{d} x_i = 1$.

4. (jatkoa) Määrää $\{X_n\}$:n tyypilliset arvot ts. kaikki vektorit $x = (x_1, \ldots, x_d)$, joille $\Lambda^*(x) = 0$.

5. Tarkastellaan vakuutusyhtiötä, jonka vuotuiset vahinkomäärät $\eta_1, \eta_2, \ldots$ ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia. Olkoon c muuttujien yhteinen kumulantit generoiva funktio, $c(t) = \log \mathbb{E}(\exp(t\eta_1)), t \in \mathbb{R}$. Oletetaan, että $c(t) < \infty, \forall t \in \mathbb{R}$. Olkoon $b_1 > 0$ ja

$$b_n = \alpha \eta_{n-1} + (1-\alpha) b_{n-1},$$

kun $n \geq 2$, missä $\alpha \in (0,1)$ on vakio. Vuoden n vakuutusmaksu olkoon $B_n = b_n + \varrho$, missä $\varrho > 0$ on vakio. Yhtiön tappioprosessi on siis $\{Y_n\}$,

$$Y_n = \sum_{j=1}^{n} (\eta_j - B_j), \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Osoita, että tappioprosessiin liittyvä Lundbergin eksponentti on $R = +\infty$.