Suurten poikkeamien harj. 4, 11.11. -15

1. $\lambda \in (0,1) \Rightarrow (gA)((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2)$

$$= g((1-\lambda)Ax_1 + \lambda Ax_2) \le (1-\lambda) g(Ax_1) + \lambda g(Ax_2)$$

$$= (1-\lambda)(gA)(x_1) + \lambda (gA)(x_2).$$

2. Oletetaan lisäksi: $f(x) \ge M, \forall x, \ M \in \mathbb{R}$.
Merkitään lyhyesti $h = Af$. Osoitettava siis

$$h((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \le (1-\lambda)h(x_1) + \lambda h(x_2), \ \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^{d'}, \lambda \in (0,1).$$

Asia on selvä, jos oik. $= \infty$. Muuten $\exists y_1, y_2 \in \mathbb{R}^d$:

$$Ay_1 = x_1, \ Ay_2 = x_2, \ f(y_1) \le h(x_1) + \varepsilon, \ f(y_2) \le h(x_2) + \varepsilon.$$

Tällöin $A((1-\lambda)y_1 + \lambda y_2) = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2$, joten

$$h((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \le f((1-\lambda)y_1 + \lambda y_2)$$

$$\le (1-\lambda)f(y_1) + \lambda f(y_2) \le (1-\lambda)h(x_1) + \lambda h(x_2) + \varepsilon.$$

3. $x \in \mathbb{R}^{d'} \Rightarrow$

$$(Af)^*(x) = \sup\{\langle t, x\rangle - (Af)(t) ; t \in \mathbb{R}^{d'}\}$$

$$= \sup_{t \in \mathbb{R}^{d'}} \{\langle t, x\rangle - \inf\{f(y) ; Ay = t, y \in \mathbb{R}^d\}\}$$

$$= \sup_{t \in \mathbb{R}^{d'}} \sup_{y, Ay = t} \{\langle t, x\rangle - f(y)\}$$

$$= \sup_{y \in \mathbb{R}^d} \{\langle Ay, x\rangle - f(y)\}$$

$$= \sup_{y \in \mathbb{R}^d} \{\langle y, A^T x\rangle - f(y)\}$$

$$= f^*(A^T x) = (f^* A^T)(x).$$

4. $\Lambda_n(t) = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} \log(1 - p_i + p_i e^t)$

$\longrightarrow \log(1-p+pe^t)$, $n \to \infty$.

L. 3.2 $\Rightarrow$ $n^{-1} Y_n \to \Lambda'(0) = p$ m.v., $Y_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$.

5. Jos $t \le 1$, niin

$$\mathbb{E}(e^{t\xi}) = \int_1^\infty C' x^{-3} e^{(t-1)x}\,dx \le \int_1^\infty C' x^{-3}\,dx < \infty,$$

Jos $t > 1$, niin annetulle $\varepsilon > 0$,

$$\int_1^\infty C' x^{-3} e^{(t-1)x}\,dx \ge \int_{M_\varepsilon}^\infty C' e^{-\varepsilon x} e^{(t-1)x}\,dx,$$

kun M_ε suuri. Integraali hajaantuu, kun $-\varepsilon + t - 1 \ge 0$ l. kun $\varepsilon \le t-1$. Siis $\mathcal{D}(\ell) = (-\infty, 1]$.

Jos $t \in (-\infty, 1)$, niin

$$\ell'(t) = \frac{\mathbb{E}(\xi e^{t\xi})}{\mathbb{E}(e^{t\xi})}, \quad \text{ja}$$

$$\liminf_{t \to 1-} \mathbb{E}(e^{t\xi}) \ge \mathbb{E}(\liminf_{t \to 1-} e^{t\xi}) = e^{\ell(1)} > 0,$$

$$\limsup_{t \to 1-} \mathbb{E}(\xi e^{t\xi}) = \limsup_{t \to 1-} \int_1^\infty C' x^{-2} e^{(t-1)x}\,dx$$

$$\le \limsup_{t \to 1-} \int_1^\infty C' x^{-2} < \infty.$$

Nähdään, että $|\ell'(t)|$ on rajoitettu, $t \to 1-$.