Suurten poikkeamien teorian laskuharjoitus 4, 11.11.2015

Huom. Luento 26.11. on siirretty —> 25.11. klo 16, sali C123.

1. Olkoon A $d' \times d$-matriisi ja

$$f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \quad g : \mathbb{R}^{d'} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

konvekseja funktioita.

Määritellään funktio $gA : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ehdosta

$$(gA)(x) = g(Ax), \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

(x tulkitaan pystyvektoriksi, jolloin Ax on määritelty). Osoita, että gA on konveksi.

2. (jatkoa) Määritellään funktio $Af : \mathbb{R}^{d'} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ehdosta

$$(Af)(x) = \inf\{f(y) \mid Ay = x, y \in \mathbb{R}^d\}.$$

Osoita, että Af on konveksi (sopimus: tyhjän joukon infimum on ∞).

3. (jatkoa). Osoita, että $(Af)^* = f^* A^T$, missä A^T tarkoittaa A:n transpoosia.

4. Olkoot $\xi_1, \xi_2, \dots$ riippumattomia samalla todennäköisyyskentällä määriteltyjä satunnaismuuttujia ja

$$\mathbb{P}(\xi_j = 0) = 1 - p_j \quad \text{ja} \quad \mathbb{P}(\xi_j = 1) = p_j$$

kaikilla $j \in \mathbb{N}$, missä $p_j \in [0, 1]$. Oletetaan, että $\lim_{n\to\infty} p_n = p \in (0, 1)$. Osoita, että

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\xi_1 + \cdots + \xi_n}{n} = p \quad \text{m.v.}$$

5. Olkoon ξ satunnaismuuttuja, jonka tiheysfunktio g on

$$g(x) = \begin{cases} Cx^{-3}e^{-x}, & x \geq 1 \\ 0, & x < 1, \end{cases}$$

missä $C > 0$ on vakio. Olkoon ξ:n kumulantit generoiva funktio f,

$$f(t) = \log \mathbb{E}\left(e^{t\xi}\right), t \in \mathbb{R},$$

(kts. lemma 3.2). Osoita, että $\mathcal{D}(f) = (-\infty, 1]$ ja että $\mid f'(t) \mid$ ei lähene ääretöntä, kun $t \to 1-$ (mahdollista derivoinnin ja integroinnin järjestyksen vaihtoa ei tarvitse perustella).