Suurten poikkeamien teorian laskuharjoitus 3, 28.10.2015

1. Olkoon $Y_1, Y_2, \ldots$ jono satunnaisvektoreita todennäköisyyskentällä $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ja

$$\Lambda(t) = \limsup_{n\to\infty} n^{-1} \log \mathbb{E}\left(e^{\langle t, Y_n\rangle}\right), \quad t \in \mathbb{R}^d.$$

Oletetaan, että $\Lambda(t_0) = -\infty$ eräälle $t_0 \in \mathbb{R}^d$. Osoita, että jono $\{Y_n/n\}$ toteuttaa heikon suurten poikkeamien periaatteen vauhtifunktiolla Λ^*.

2. Olkoon $\{X_n\}$ jono satunnaisvektoreita $\mathbb{R}^d$:ssä. Kirjoitetaan komponenteittain

$$X_n = (X_{n1}, \ldots, X_{nd}).$$

Oletetaan, että $X_{n1}, \ldots, X_{nd}$ ovat riippumattomia, $\forall n \in \mathbb{N}$. Oletetaan lisäksi, että $\{X_{ni}\}$ toteuttaa heikon suurten poikkeamien periaatteen vauhtifunktiolla I_i, $i = 1, \ldots, d$. Osoita, että $\{X_n\}$ toteuttaa heikon suurten poikkeamien periaatteen vauhtifunktiolla I, missä

$$I(x) = I_1(x_1) + \cdots + I_d(x_d), \quad \forall x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d.$$

Vihje: Sovella lausetta 2.1 ja edellisen kerran tehtävää 3.

3. Olkoon $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ mielivaltainen kuvaus. Olkoon $g(t) = f(t + a)$, $\forall t \in \mathbb{R}^d$ ja $h(t) = bf(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}^d$, missä $a \in \mathbb{R}^d$ on vakiovektori ja $b > 0$ reaaliluku. Osoita, että

a) $g^*(x) = f^*(x) - \langle a, x\rangle$, $\forall x \in \mathbb{R}^d$

b) $h^*(x) = bf^*(x/b)$, $\forall x \in \mathbb{R}^d$.

4. Olkoon $\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots$ riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia ja

$$\mathbb{P}(\xi = 0) = 1 - p \quad \text{ja} \quad \mathbb{P}(\xi = 1) = p,$$

missä $p \in (0, 1)$ (vrt. edellisten harjoitusten tehtävä 5.). Olkoon $N \in \mathbb{N}$ kiinteä, $a_1, \ldots, a_N$ kiinteitä positiivisia reaalilukuja sekä $a = a_1 + \cdots + a_N$. Määritellään satunnaismuuttuja η_n ehdosta

$$\eta_n = a_1\xi_n + a_2\xi_{n-1} + \cdots + a_N\xi_{n-N+1},$$

missä $\xi_{-1}, \ldots, \xi_{1-N} \equiv 0$. Olkoon

$$Y_n = \eta_1 + \cdots + \eta_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Määrää prosessiin $\{Y_n\}$ liittyvä Gärtner-Ellisin lauseen vauhtifunktio.

5. Olkoon $\{P_n\}$ perhe jakaumia ja I vauhtifunktio.

a) Oletetaan, että I on hyvä ja että $\{P_n\}$ toteuttaa suurten poikkeamien periaatteen ylärajan kaikille suljetuille joukoille vauhtifunktiolla I (kaava (2.14) luennoissa). Osoita, että $\{P_n\}$ on eksponentiaalisesti tiukka.

b) Oletetaan, että $\{P_n\}$ toteuttaa suurten poikkeamien periaatteen vauhtifunktiolla I. Osoita, että I on hyvä silloin ja vain silloin kun $\{P_n\}$ on eksponentiaalisesti tiukka.