1. Olkoon $\alpha > 0$. Silloin voidaan määrätä $M > 0$:

$$\limsup n^{-1} \log \mathbb{P}(\bar{X}_{ni} \in [-M, M]^c) \le -\alpha, \ \forall i.$$

Koska

$$\mathbb{P}(\bar{X}_n \in ([-M,M]^d)^c) = \mathbb{P}(\bar{X}_{ni} \in [-M,M]^c \text{ jollain } i)$$

$$\le \sum_{i=1}^{d} \mathbb{P}(\bar{X}_{ni} \in [-M,M]^c),$$

niin lemman 2.1 nojalla

$$\limsup n^{-1} \log \mathbb{P}(\bar{X}_n \in ([-M,M]^d)^c) \le -\alpha.$$

2. Koska $\mathbb{P}(A_{n1} \cup \dots \cup A_{nN}) \le \sum_{i=1}^{N} \mathbb{P}(A_{ni})$, niin lemma 2.1

$$\Rightarrow \limsup n^{-1} \log \mathbb{P}(A_{n1} \cup \dots \cup A_{nN}) \le \max_{i=1}^{N} \limsup n^{-1} \log \mathbb{P}(A_{ni}).$$

Toisaalta $\mathbb{P}(A_{n1} \cup \dots \cup A_{nN}) \ge \mathbb{P}(A_{ni}), \forall i$, josta seuraa käänteinen epäyhtälö.

3. Kaavan oikea puoli on $-I(x)$, missä I on lauseen 2.1 mukainen vf. Saman lauseen mukaan ylärajat kompakteille joukoille pätevät vf:llä I. On siis todistettava vain alarajat. Olkoon G avoin ja $\delta > 0$: $B(x,\delta) \subseteq G$. Tällöin

$$\liminf n^{-1} \log \mathbb{P}(\bar{X}_n \in G) \ge \liminf n^{-1} \log \mathbb{P}(\bar{X}_n \in B(x,\delta)),$$

joten

$$\liminf n^{-1} \log \mathbb{P}(\bar{X}_n \in G) \ge$$

$$\lim_{\delta \to 0+} \liminf n^{-1} \log \mathbb{P}(\bar{X}_n \in B(x,\delta)) = -I(x).$$

oletuksen nojalla. Alaraja seuraa ottamalla supremum yli joukon $x \in G$, I on api lauseen 2.1 nojalla

4. Valitaan

$$\mathbb{P}(X_n = k) = c_n e^{-\frac{n}{k}}, \quad k = 1, \dots, n,$$

missä c_n valitaan siten, että

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_n = k) = 1.$$

Tällöin $c_n \in [n^{-1}, e]$, joten

$$\lim n^{-1} \log c_n = 0.$$

Jos $x = k \in \mathbb{N}$, niin

$$\lim_{\delta \to 0+} \lim_{n \to \infty} n^{-1} \log \underbrace{\mathbb{P}(X_n \in B(x, \delta))}_{= c_n e^{-\frac{n}{k}},\ \text{kun } \delta \text{ pieni; näin}}$$

$$= \lim_{\delta \to 0+} n^{-1} \log e^{-\frac{n}{k}} = -\frac{1}{x}.$$

Jos $x \notin \mathbb{N}$, niin $\mathbb{P}(X_n \in B(x, \delta)) = 0$, kun δ pieni.

Edellisen tehtävän nojalla $\{X_n\}$ toteuttaa NSPP:n,

$$I(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in \mathbb{N} \\ \infty, & x \notin \mathbb{N}. \end{cases}$$

5. $\Lambda(t) = \log \mathbb{E}(e^{tS}) = \log(1 - p + pe^t)$, $t \in \mathbb{R}$.

$$\Lambda^*(x) = \sup\{tx - \log(1 - p + pe^t);\ t \in \mathbb{R}\}.$$

Jos $x \in (0,1)$, niin sup saavutetaan derivaatan nollakohdassa $t = t_x = \log x - \log(1-x) + \log(1-p) - \log p$ ja $\Lambda^*(x)$ on [illegible]. Jos $x > 1$, niin

$$\Lambda^*(x) \geq \lim_{t \to \infty} \{tx - \Lambda(t)\} = \infty$$

Samoin $\Lambda^*(x) = \infty$, kun $x < 0$. Jos $x = 1$, niin

$$\Lambda^*(1) = \lim_{t \to \infty} \{t - \Lambda(t)\} = -\log p$$

Samoin $\Lambda^*(0) = -\log(1-p)$.