Suurten poikkeamien teorian laskuharjoitus 2, 7.10.2015

1. Olkoon $\{X_n\}$ jono satunnaisvektoreita $\mathbb{R}^d$:ssä. Kirjoitetaan komponenteittain

$$X_n = (X_{n1}, \dots, X_{nd}).$$

Oletetaan, että kaikki yksiulotteiset jonot $\{X_{ni}\}$, $i = 1, \dots, d$, ovat eksponentiaalisesti tiukkoja $\mathbb{R}$:ssä. Osoita, että $\{X_n\}$ on eksponentiaalisesti tiukka $\mathbb{R}^d$:ssä.

2. Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ todennäköisyyskenttä, $N \in \mathbb{N}$ kiinteä ja $A_{n1}, \dots, A_{nN} \in \mathcal{F}$, $n \in \mathbb{N}$. Osoita, että

$$\limsup_{n\to\infty} n^{-1} \log \mathbb{P}(A_{n1} \cup \dots \cup A_{nN}) = \max_{i=1}^{N} \limsup_{n\to\infty} n^{-1} \log \mathbb{P}(A_{ni}).$$

3. Oletetaan, että satunnaisvektoriperheelle $\{X_n\}$ pätee

$$\lim_{\delta\to 0+} \liminf_{n\to\infty} n^{-1} \log \mathbb{P}(X_n \in B(x,\delta)) = \lim_{\delta\to 0+} \limsup_{n\to\infty} n^{-1} \log \mathbb{P}(X_n \in B(x,\delta))$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}^d$. Osoita, että $\{X_n\}$ toteuttaa heikon suurten poikkeamien periaatteen eräällä vauhtifunktiolla.

4. (jatkoa) Esitä esimerkki satunnaismuuttujaperheestä, joka toteuttaa heikon suurten poikkeamien periaatteen vauhtifunktiolla I, jolle $I(x) < \infty$ jollain $x \in \mathbb{R}$ ja $I(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

5. Olkoon $\xi, \xi_1, \xi_2, \dots$ riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia ja

$$\mathbb{P}(\xi = 0) = 1 - p \quad \text{ja} \quad \mathbb{P}(\xi = 1) = p,$$

missä $p \in (0,1)$. Merkitään $Y_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$, $n \in \mathbb{N}$. Osoita, että prosessiin $\{Y_n\}$ liittyvä Gärtner-Ellisin lauseen vauhtifunktio Λ^* on

$$\Lambda^*(x) = \begin{cases} x \log x + (1-x)\log(1-x) - x \log p + (x-1)\log(1-p), & \forall x \in [0,1], \\ +\infty \text{ muuten.} \end{cases}$$

(Sopimus: $0 \log 0 = 0$.)