Suurten poikkeamien teorian harj. 1, 23.9.-15

1. Olkoon $\alpha \in \mathbb{R}$ ja $f(x_0) > \alpha$. Tällöin $f_i(x_0) > \alpha$ jollain $i \in J$. Koska f_i on aps, on $f_i(x) > \alpha$, $\forall x \in B(x_0,\delta)$ eräälle $\delta > 0$. Siis myös $f(x) \geq f_i(x) > \alpha$, $\forall x \in B(x_0,\delta)$

2. '$\Rightarrow$'. Olkoon $\alpha \in \mathbb{R}$ ja $f(x_0) > \alpha$. Tällöin

$$\lim_{\delta \to 0} \inf \{ f(x) \mid |x - x_0| < \delta \} \geq f(x_0) > \alpha + \varepsilon$$

eräälle $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : f(x) > \alpha$, $\forall |x - x_0| < \delta$, joten $\Psi_f(\alpha)^c$ on avoin.

'$\Leftarrow$' Olkoon $x_0 \in \mathbb{R}^d$ ja $\varepsilon > 0$. Koska $\Psi_f(f(x_0) - \varepsilon)^c$ on avoin, niin $f(x) > f(x_0) - \varepsilon$, $\forall |x - x_0| < \delta$ edellyttäen, että $f(x_0) \in \mathbb{R}$. Siis

$$\liminf_{x \to x_0} f(x) \geq f(x_0) - \varepsilon \Rightarrow \liminf_{x \to x_0} f(x) \geq f(x_0).$$

Olkoon $f(x_0) = \infty$. Tällöin $x_0 \in \Psi_f(\alpha)^c$, $\forall \alpha$. Kuten edellä nähdään, että $f(x) > \alpha - \varepsilon$, $\forall |x - x_0| < \delta_\alpha$, joten $\liminf_{x \to x_0} f(x) \geq \alpha - \varepsilon$
$\Rightarrow \liminf_{x \to x_0} f(x) = \infty = f(x_0)$.

Olkoon $f(x_0) = -\infty$. Tällöin triviaalisti $\liminf_{x \to x_0} f(x) \geq f(x_0)$.

3. $G \subseteq \mathbb{R}^d$ avoin. Jos $x_0 \notin G$, on alaraja $= -\infty$ triviaali. Jos $x_0 \in G$, niin $B(x_0,\delta) \subseteq G$ jollain $\delta > 0$. Jos n on riittävän suuri, niin

$$\mathbb{P}(Z_n \in G) \geq \mathbb{P}(Z_n \in B(x_0,\delta)) \geq \mathbb{P}(Z_n \in B(x_0,\delta_n)) = 1$$

$$\Rightarrow \liminf n^{-1} \log \mathbb{P}(Z_n \in G) = 0 = I(x_0) = \inf \{ I(x) \mid x \in G \},$$

$F \subseteq \mathbb{R}^d$ suljettu. Jos $x_0 \in F$, on yläraja $= 0$ triviaali. Jos $x_0 \notin F$, $\exists \delta > 0$: $B(x_0,\delta) \cap F = \emptyset$. Siis $F \subseteq \{ x \mid |x - x_0| \geq \delta \}$. Kun n on suuri, on siis

$$1 = \mathbb{P}(Z_n \in B(x_0,\delta_n)) \leq \mathbb{P}(Z_n \in B(x_0,\delta)) = 1 - \mathbb{P}(|Z_n - x_0| \geq \delta).$$

Nähdään, että $\mathbb{P}(|Z_n - x_0| \geq \delta) = 0$, joten $\mathbb{P}(Z_n \in F) = 0$

$$\Rightarrow \limsup n^{-1} \log \mathbb{P}(Z_n \in F) = -\infty = -\inf \{ I(x) \mid x \in F \}.$$

4. Jos ko. maksimi on $+\infty$, sä

$$\limsup n^{-1} \log a_{in} = \infty,$$

niin

$$\limsup n^{-1} \log (a_{1n} + \dots + a_{Nn}) \geq \limsup n^{-1} \log a_{in} = \infty .$$

Jos maksimi $= -\infty$, niin annetulle $M > 0$ voidaan määrätä n_M:

$$n^{-1} \log a_{in} \leq -M, \quad \forall n \geq n_M, \quad i = 1, \dots, d.$$

Siispä $a_{in} \leq e^{-nM}$, $\forall i$, $n \geq n_M$, jolloin

$$a_1 + \dots + a_{Nn} \leq N e^{-nM}$$

$$\Rightarrow \limsup n^{-1} \log (a_1 + \dots + a_{Nn}) \leq -M.$$

5. Valitaan $X_n = (-1)^n$ $(d=1)$. Jos HSPP pätisi vauhti funktiolla I, niin olisi

$$-\inf \{ I(x) \mid x < 1 \} \leq \liminf n^{-1} \log \mathbb{P}(X_n < 1)$$

$$= -\infty \quad (\mathbb{P}(X_n < 1) = 0, \text{ kun } n = 2k, \quad k = 0, 1, 2, \dots)$$

On siis $I(x) = \infty$, $\forall x < 1$. Tarkastelemalla joukkoa $(-1, \infty)$ nähdään, että $I(x) = \infty$, $\forall x > -1$. Siis $I(x) = \infty$, $\forall x$. Ylärajavaatimus ei toteudu, koska

$$\mathbb{P}(X_n \in [-1, 1]) = 1, \forall n,$$

joten

$$\limsup n^{-1} \log \mathbb{P}(X_n \in [-1, 1]) = 0 > -\inf_{x \in [-1,1]} I(x) = -\infty .$$