

Suurten poikkeamien teorian laskuharjoitus 1, 23.9.2015

1. Olkoon $f_i : \mathbb{R}^d \rightarrow \bar{\mathbb{R}}, i \in \mathcal{I}$, perhe alhaalta puolijatkuvia funktioita ja

$$f(x) = \sup\{f_i(x) | i \in \mathcal{I}\}, \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

Osoita, että f on alhaalta puolijatkuva.

2. Osoita, että funktion $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ tasojoukot ovat suljettuja, jos f on alhaalta puolijatkuva.

3. Oletetaan, että jono $\{X_n\}$ toteuttaa ehdon

$$\mathbb{P}(|X_n - x_0| \leq \delta_n) = 1, \quad n = 1, 2, \dots,$$

missä $x_0 \in \mathbb{R}^d$ on kiinteä ja $\delta_n \rightarrow 0$, kun $n \rightarrow \infty$. Osoita, että $\{X_n\}$ toteuttaa suurten poikkeamien periaatteen vauhtifunktiolla I ,

$$I(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x = x_0 \\ \infty, & \text{kun } x \neq x_0. \end{cases}$$

4. Todista lemma 2.1. tapauksissa

$$\max_{i=1}^N \limsup n^{-1} \log a_{in} = +\infty.$$

5. Esitä esimerkki satunnaismuuttujajonosta $\{X_n\}$, joka ei toteuta heikkoa suurten poikkeamien periaatetta millään vauhtifunktiolla.