4. Sovellus vararikkoteoriaan

Vakuutusyhtiön vararikkoteoriassa tarkastellaan seuraavaa asetelmaa. Olkoon

U_0 = yhtiön alkupääoma (varallisuus hetkellä nolla),

η_n = vuonna n maksettavat korvaukset,

B_n = vuonna n saadut vakuutusmaksut.

Olkoon edelleen

$$\xi_n = \eta_n - B_n = \text{vuoden } n \text{ tappio}$$

ja

$$Y_n = \xi_1 + \dots + \xi_n = \text{kumulatiivinen tappio.}$$

Vararikkohetki $T = T(U_0)$ määritellään ehdosta

$$T = \begin{cases} \inf\{n \mid Y_n > U_0\} \\ +\infty, \text{ jos } Y_n \le U_0, \ \forall n. \end{cases}$$

Tulkinta on luonnollinen: jos $T = n$, on yhtiön varallisuus negatiivinen ensimmäisen kerran hetkellä n. Tällöin yhtiö tekee konkurssin.

Jonkinlainen perusongelma on arvioida todennäköisyyttä

$$\mathbb{P}(T < \infty),$$

kun U_0 on suuri.

Klassisessa mallissa oletetaan, että $\xi_1, \xi_2, \ldots$ ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia ja $\{Y_n\}$ siis satunnaiskulku. Osoittautuu, että yleisin ehdoin

$$\lim_{U_0\to\infty} e^{RU_0}\, \mathbb{P}(T<\infty) = \mathcal{H},$$

missä $\mathcal{H}>0$ ja $R>0$ ovat vakioita. Erityisesti

(4.1) $$\lim_{U_0\to\infty} U_0^{-1}\log \mathbb{P}(T<\infty) = -R.$$

Suurten poikkeamien teorian avulla (4.1):ssä voidaan luopua satunnaiskulkumallista. Tämä on motivoitua sovelluksen kannalta. Usein esimerkiksi vakuutusmaksu B_n riippuu funktionaalisesti aiempien vuosien korvauksista, jolloin prosessin $\{Y_n\}$ lisäykset eivät ole riippumattomia.

Olkoot Λ_n ja Λ kuten aiemminkin (nyt $d=1$),

$$\begin{cases} \Lambda_n(t) = n^{-1}\log \mathbb{E}(e^{tY_n}), \quad t\in\mathbb{R},\\ \Lambda(t) = \limsup \Lambda_n(t). \end{cases}$$

Merkitään

$$R = \sup\{t \mid \Lambda(t)\le 0\} \in [0,\infty].$$

Tulkinnallisesti: R kuvaa todennäköisyyttä, että yhtiö menettää suuren määrän rahaa annetulla tappioprosessilla $\{Y_n\}$. Mitä suurempi R, sitä paremmin ovat asiat (edellyttäen siis, että (4.1) voidaan todistaa).

Lause 4.1. Oletetaan, että Λ on derivoituva pisteessä 0 ja $\Lambda'(0) < 0$. Olkoon lisäksi

$$\Lambda_n(t) < \infty, \quad \forall t \in (0, R), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Oletetaan, että $\{Z_n\} = \{n^{-1} Y_n\}$ toteuttaa SPP:n vauhtifunktiolla Λ^*. Silloin (4.1) pätee.

Todistus. Osoitetaan ensin, että

$$(4.2) \qquad \limsup_{U_0 \to \infty} U_0^{-1} \log \mathbb{P}(T < \infty) \leq -R.$$

Jos $R = 0$, on asia selvä (itse asiassa $R > 0$, koska $\Lambda'(0) < 0$). Olkoon $t \in (0, R)$ mielivaltainen. Tällöin konveksisuuden nojalla $\Lambda(t) < 0$: nimittäin $\Lambda(t_0) < 0$ jollain $t_0 \in (0, t)$ ja $\Lambda(u) \leq 0$ jollain $u \in (t, R]$, joten

$$\Lambda(t) \leq (1-\lambda)\Lambda(t_0) + \lambda \Lambda(u) < 0,$$

missä $t = (1-\lambda) t_0 + \lambda u$. Olkoon $\varepsilon > 0$: $\Lambda(t) \leq -\varepsilon$. Tsebyshevin epäyhtälön nojalla

$$\mathbb{E}(e^{t Y_n}) \geq e^{t U_0} \mathbb{P}(Y_n > U_0),$$

joten

$$\mathbb{P}(T < \infty) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(T = n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(Y_n > U_0)$$

$$\leq e^{-t U_0} \sum_{n=1}^{\infty} e^{n \Lambda_n(t)}.$$

Viimeksi mainittu sarja suppenee kohti erästä reaalilukua, koska $\Lambda_n(t) < \infty$, $\forall n$, ja $\Lambda_n(t) \le -\varepsilon/2$, kun n on riittävän suuri. Siispä

$$\limsup_{U_0 \to \infty} U_0^{-1} \log \mathbb{P}(T < \infty) \le -t.$$

Tästä seuraa (4.2), koska $t \in (0, R)$ on mielivaltainen.

On vielä käännettävä (4.2). Olkoon $v > 0$ kiinteä. Selvästi, $\forall U_0 > 0$,

$$\mathbb{P}(T < \infty) \ge \mathbb{P}\left(Y_{\lceil v U_0 \rceil} > U_0 \right)$$

$$\ge \mathbb{P}\left(\frac{Y_{\lceil v U_0 \rceil}}{\lceil v U_0 \rceil} > \frac{1}{v} \right),$$

joten

$$\liminf_{U_0 \to \infty} U_0^{-1} \log \mathbb{P}(T < \infty)$$

$$\ge v \liminf_{U_0 \to \infty} \lceil v U_0 \rceil^{-1} \log \mathbb{P}\left(\frac{Y_{\lceil v U_0 \rceil}}{\lceil v U_0 \rceil} > \frac{1}{v} \right)$$

$$\ge -v \inf \left\{ \Lambda^*(x) \mid x > \frac{1}{v} \right\},$$

Tämä pätee kaikilla $v > 0$, joten alarajaksi saadaan

$$-\inf_{v > 0} v \inf_{x > \frac{1}{v}} \Lambda^*(x) = -\inf_{x > 0} \inf_{v > \frac{1}{x}} \left\{ v \Lambda^*(x) \right\}$$

$$= -\inf_{x > 0} \left\{ \frac{1}{x} \Lambda^*(x) \right\} = -\inf_{v > 0} \left\{ v \Lambda^*\left(\frac{1}{v}\right) \right\},$$

Lause on todistettu, jos voidaan näyttää, että

$$\sup\{t \mid \Lambda(t) \le 0\} = \inf_{v>0} \{v\Lambda^*(\tfrac{1}{v})\}.$$

Olkoon $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$,

$$h(x) = \inf_{v>0} \{v\Lambda^*(\tfrac{x}{v})\}.$$

Tällöin $h(\lambda x) = \lambda h(x)$, $\forall \lambda > 0$, $x \in \mathbb{R}$:

$$h(\lambda x) = \inf_{v>0} \{v\Lambda^*(\tfrac{\lambda x}{v})\}$$

$$= \inf_{v>0} \{\lambda v \Lambda^*(\tfrac{\lambda x}{\lambda v})\} = \lambda h(x)$$

(h on positiivisesti homogeeninen). Jos $\Lambda^*(0) < \infty$, niin

$$h(x) = \begin{cases} 0, & \text{jos } x \le 0 \\ x\,h(1), & \text{jos } x > 0 \end{cases}$$

($\Lambda^*(\Lambda'(0)) = 0$, joten $h(x) = 0, \forall x \le 0$, Seuraus 3.1). Jos taas $\Lambda^*(0) = \infty$, niin $\Lambda^*(x) = \infty$, $\forall x \ge 0$, joten

$$h(x) = \begin{cases} 0, & \text{jos } x < 0 \\ \infty, & \text{jos } x \ge 0. \end{cases}$$

Nähdään, että h on konveksi, sillä $h(1) \ge 0$, Lisäksi

$$h^*(t) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \{ xt - h(x) \}$$

$$= \sup_{x \in \mathbb{R}} \sup_{v > 0} \{ xt - v \Lambda^* (\tfrac{x}{v}) \}$$

$$= \sup_{v > 0} \{ v \sup_{x \in \mathbb{R}} \{ \tfrac{x}{v} t - \Lambda^* (\tfrac{x}{v}) \} \}$$

$$= \sup_{v > 0} \{ v \underline{\Lambda}(t) \} = \begin{cases} +\infty, & \text{jos } \underline{\Lambda}(t) > 0 \\ 0, & \text{jos } \underline{\Lambda}(t) \leq 0 \end{cases}$$

(lemma 3.10). Nähdään, että

$$\underline{h}(x) = \sup \{ tx \mid \underline{\Lambda}(t) \leq 0 \} = Rx, \quad \forall x \geq 0.$$

Siis $h(1) = \underline{h}(1) = R$, joten $\inf_{v > 0} \{ v \Lambda^* (\tfrac{1}{v}) \} = R$. $\square$

5. Suurten poikkeamien periaatteen semantiikkaa

Edellä on todettu, että suurten poikkeamien periaate toteutuu varsin yleisesti ja että usein vauhtifunktio on konveksi. Jälkimmäinen havainto on itse asiassa hieman harhainen, sillä annetusta SPP:stä voidaan tuottaa uusia jatkuvien kuvausten avulla. Tällöin vauhtifunktion konveksisuus ei yleensä säily. Seuraavassa tarkastellaan tätä kysymystä ja lisäksi liitetään odotusarvoihin eksponentiaalisia vauhteja.

5.1. Kontraktioperiaate

Jatkuvat kuvaukset $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d'}$ välittävät suurten poikkeamien periaatteen seuraavasti.

Lause 5.1. (kontraktioperiaate). Oletetaan, että $\mathbb{R}^d$-arvoinen stokastinen prosessi $\{Z_n\}$ toteuttaa suurten poikkeamien periaatteen vauhtifunktiolla I. Olkoon $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d'}$ jatkuva kuvaus ja

$$J(y) = \inf\{ I(x) \mid x \in \mathbb{R}^d, f(x) = y\}, \forall y \in \mathbb{R}^{d'},$$

(infimum yli tyhjän joukon sovitaan $+\infty$:ksi). Silloin $\{f(Z_n)\}$ toteuttaa suurten poikkeamien periaatteen vauhtifunktiolla $\underline{J}$. Jos lisäksi I on hyvä vauhtifunktio, niin $\underline{J} = J$ ja J on hyvä vf.

Todistus. Yleisesti, jos $A \subset \mathbb{R}^{d'}$, niin

$$f(Z_n) \in A \text{ jos ja vain jos } Z_n \in f^{-1}(A)$$

ja

$$\inf_{y \in A} J(y) = \inf_{x \in f^{-1}(A)} I(x).$$

Koska f on jatkuva, niin $f^{-1}(F)$ on suljettu, jos F on suljettu ja $f^{-1}(G)$ on avoin, jos G on avoin.

Olkoon $F \subseteq \mathbb{R}^{d'}$ suljettu. Edellä todetun nojalla

$$\limsup n^{-1} \log \mathbb{P}(f(\Xi_n) \in F) = \limsup n^{-1} \log \mathbb{P}(\Xi_n \in f^{-1}(F))$$

$$\leq - \inf_{x \in f^{-1}(F)} I(x) = - \inf_{y \in F} J(y).$$

Jos taas $G \subseteq \mathbb{R}^{d'}$ on avoin, niin

$$\liminf n^{-1} \log \mathbb{P}(f(\Xi_n) \in G) = \liminf n^{-1} \log \mathbb{P}(\Xi_n \in f^{-1}(G))$$

$$\geq - \inf_{x \in f^{-1}(G)} I(x) = - \inf_{y \in G} J(y).$$

Lauseen 2.4 nojalla $\{f(\Xi_n)\}$ toteuttaa SPP:n vauhtifunktiolla $\underline{J}$.

Oletetaan nyt lisäksi, että I on hyvä vf. Olkoon $\alpha \in \mathbb{R}$ mielivaltainen. Osoitetaan, että

(5.1) $\Psi_J(\alpha) = \{ y \in \mathbb{R}^{d'} \cap f(\mathbb{R}^d) \mid J(y) \leq \alpha \} = f(\Psi_I(\alpha)).$

Olkoon $y_0 \in \Psi_J(\alpha)$ ts. $J(y_0) \leq \alpha$. Tällöin $y_0 = f(x)$ eräälle $x \in \mathbb{R}^d$, $I(x) < \infty$. Siispä eräälle $x_0 \in f^{-1}(\{y_0\})$,

$$I(x_0) = \inf \{ I(x) \mid x \in f^{-1}(\{y_0\}) \} = J(y_0) \leq \alpha$$

(api funktio saavuttaa miniminsä kompaktissa joukossa, infimum yllä voidaan rajata kompaktiin joukkoon, koska I on hyvä). Siis $y_0 = f(x_0)$, $I(x_0) \leq \alpha$, joten

$$y_0 \in f(\Psi_I(\alpha)).$$

Olkoon $y_0 \in f(\Psi_I(\alpha))$. Tällöin

$$y_0 = f(x_0), \quad I(x_0) \leq \alpha,$$

joten

$$J(y_0) = J(f(x_0)) = \inf\{I(x) \mid f(x) = f(x_0)\}$$

$$\leq I(x_0) \leq \alpha.$$

Siis $y_0 \in \Psi_J(\alpha)$. Yhteys (5.1) on todistettu.

Oletuksen nojalla $\Psi_I(\alpha)$ on kompakti. Kompaktin joukon kuva jatkuvassa kuvauksessa on kompakti, joten $\Psi_J(\alpha)$ on kompakti (ja siis suljettu). Siis J on apj ja edellä todetun nojalla hyvä vf. Erityisesti $J = \underline{J}$. $\square$

5.2. Varadhanin integraalilemma

Todennäköisyyksien lisäksi on usein tarvetta ymmärtää prosessiin liittyviä odotusarvoja. Näihin voidaan liittää yleisten ehdon eksponentiaalisia vauhteja.

Lause 5.2. (Varadhanin integraalilemma). Oletetaan, että $\{Z_n\}$ toteuttaa suurten poikkeamien periaatteen vauhtifunktiolla I. Olkoon $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio. Tällöin

$$(5.2) \quad \liminf n^{-1} \log \mathbb{E}\left(e^{n f(Z_n)}\right) \geq \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \{f(x) - I(x)\}.$$

Jos lisäksi

$$(5.3) \quad \lim_{M \to \infty} \limsup_{n \to \infty} n^{-1} \log \mathbb{E}\left(e^{n f(Z_n)} 1(f(Z_n) \geq M)\right) = -\infty,$$

niin

$$(5.4) \quad \lim n^{-1} \log \mathbb{E}\left(e^{n f(Z_n)}\right) = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \{f(x) - I(x)\}.$$

Raja-arvo (5.3) pätee, jos

$$(5.5) \quad \limsup n^{-1} \log \mathbb{E}\left(e^{\gamma n f(Z_n)}\right) < \infty$$

jollain $\gamma > 1$.

<u>Todistus.</u> Olkoon $x \in \mathbb{R}^d$ kiinteä ja $\varepsilon > 0$. Jatkuvuuden nojalla eräälle $\delta > 0$,

$$f(y) > f(x) - \varepsilon, \quad \forall y \in B(x, \delta).$$

Selvästi

$$\mathbb{E}\left(e^{n f(\bar{X}_n)}\right) \geq \mathbb{E}\left(e^{n f(\bar{X}_n)} 1(\bar{X}_n \in B(x, \delta))\right)$$

$$\geq e^{n(f(x) - \varepsilon)} \mathbb{P}(\bar{X}_n \in B(x, \delta)).$$

Siispä

$$\liminf n^{-1} \log \mathbb{E}\left(e^{n f(\bar{X}_n)}\right)$$

$$\geq f(x) - \varepsilon + \liminf n^{-1} \log \mathbb{P}(\bar{X}_n \in B(x, \delta))$$

$$\geq f(x) - \varepsilon - I(x).$$

Tästä seuraa (5.2), koska x ja ε ovat mielivaltaisia.

Yhtälön (5.4) todistamiseksi oletetaan ensin, että

$$f(x) \leq M < \infty, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

Olkoon $\alpha > 0$ ja $\delta > 0$. Merkitään

$$C_i = \{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) \in [-\alpha + \delta(i-1), -\alpha + \delta i]\}$$

$$i = 1, \dots, N, \quad N = \left\lceil \frac{M + \alpha}{\delta} \right\rceil, \text{ ja}$$

$$C = \{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) \leq -\alpha\}.$$

Jatkuvuuden nojalla G ja $G_1, \ldots, G_N$ ovat suljettuja. Selvästi

$$\mathbb{E}(e^{n f(X_n)}) \le \mathbb{E}(e^{n f(X_n)} 1(X_n \in G)) + \sum_{i=1}^{N} \mathbb{E}(e^{n f(X_n)} 1(X_n \in G_i))$$

$$\le e^{-\alpha n} \mathbb{P}(X_n \in G) + \sum_{i=1}^{N} e^{n(-\alpha + \delta i)} \mathbb{P}(X_n \in G_i).$$

Lemman 2.1 ja oletuksen nojalla

$\limsup n^{-1} \log \mathbb{E}(e^{n f(X_n)})$

$$\le \max\{-\alpha - I(G), \max_{i=1}^{N}(-\alpha + \delta i - I(G_i))\}$$

$$\le \max\{-\alpha, \delta + \max_{i=1}^{N}(-\alpha + (\delta - 1)i - I(G_i))\}$$

$$\le \max\{-\alpha, \delta + \max_{i=1}^{N}(\sup_{x \in G_i}(f(x) - I(x)))\}$$

$$\le \max\{-\alpha, \delta + \sup_{x \in \mathbb{R}^d}(f(x) - I(x))\}$$

$$\to \sup_{x \in \mathbb{R}^d}\{f(x) - I(x)\}, \text{ kun } \alpha \to \infty, \delta \to 0.$$

Tämä on vaadittu tulos.

Luovutaan nyt oletuksesta $f(x) \leq M, \forall x$. Lemman 2.1 nojalla

$$\limsup n^{-1} \log \mathbb{E}\left(e^{n f(\bar{X}_n)}\right)$$

$$\leq \max\left\{ \limsup n^{-1} \log \mathbb{E}\left(e^{n f(\bar{X}_n)} 1(f(\bar{X}_n) \leq M)\right),\right.$$

$$\left. \limsup n^{-1} \log \mathbb{E}\left(e^{n f(\bar{X}_n)} 1(f(\bar{X}_n) \geq M)\right)\right\}.$$

Jälkimmäinen limsup saadaan mielivaltaisen pieneksi antamalla $M \to \infty$ oletuksen (5.3) nojalla. Olkoon

$$g_M(x) = \min(f(x), M), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Tällöin g_M on jatkuva ja lauseen väite pätee g_M:lle jo todistetun nojalla. Siis

$$\limsup n^{-1} \log \mathbb{E}\left(e^{n f(\bar{X}_n)}\right)$$

$$\leq \lim_{M\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \left(n^{-1} \log \mathbb{E}\left(e^{n f(\bar{X}_n)} 1(f(\bar{X}_n) \leq M)\right)\right)$$

$$\leq \lim_{M\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \left(n^{-1} \log \mathbb{E}\left(e^{n g_M(\bar{X}_n)}\right)\right)$$

$$\leq \lim_{M\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \{g_M(x) - I(x)\}$$

$$\leq \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \{f(x) - I(x)\}.$$

Tästä ja alarajasta (5.2) seuraa (5.4).

On vielä näytettävä, että (5.5):stä seuraa (5.3). Olkoon $M>0$. Silloin

$$\mathbb{E}\left(e^{nf(\bar{X}_n)}\mathbb{1}(f(\bar{X}_n)\geq M)\right)$$

$$= e^{nM}\,\mathbb{E}\left(e^{n(f(\bar{X}_n)-M)}\mathbb{1}(f(\bar{X}_n)\geq M)\right)$$

$$\leq e^{nM}\,\mathbb{E}\left(e^{\gamma n(f(\bar{X}_n)-M)}\mathbb{1}(f(\bar{X}_n)\geq M)\right)$$

$$\leq e^{n(1-\gamma)M}\,\mathbb{E}\left(e^{\gamma n f(\bar{X}_n)}\right).$$

Siispä

$$\lim_{M\to\infty}\limsup_{n\to\infty} n^{-1}\log\mathbb{E}\left(e^{nf(\bar{X}_n)}\mathbb{1}(f(\bar{X}_n)\geq M)\right)$$

$$\leq \lim_{M\to\infty}\left((1-\gamma)M + \limsup_{n\to\infty} n^{-1}\log\mathbb{E}\left(e^{\gamma n f(\bar{X}_n)}\right)\right)$$

$$= -\infty. \quad \square$$

<u>Huomautus 5.1.</u> Olennaisesti ottaen sama todistus antaa tulokset: jos $G\subseteq\mathbb{R}^d$ on avoin niin

$$\liminf n^{-1}\log\mathbb{E}\left(e^{nf(\bar{X}_n)}\mathbb{1}(\bar{X}_n\in G)\right)\geq \sup_{x\in G}\{f(x)-I(x)\},$$

ja jos $F\subseteq\mathbb{R}^d$ on suljettu ja (5.3) pätee, niin

$$\limsup n^{-1}\log\mathbb{E}\left(e^{nf(\bar{X}_n)}\mathbb{1}(\bar{X}_n\in F)\right)\leq \sup_{x\in F}\{f(x)-I(x)\}.$$

Esimerkki 5.1. Oletetaan, että $\{\Xi_n\}$ toteuttaa SPP:n Gärtner-Elliksin lauseen mukaisella vauhtifunktiolla Λ^*. Olkoon $f(x) = \langle t, x \rangle$, missä $t \in \mathbb{R}^d$ on kiinteä. Jos $t \in \mathring{D}(\Lambda)$, niin Varadhanin lemman nojalla

$$\Lambda(t) = \lim n^{-1} \log \mathbb{E}(e^{\langle t, \Xi_n \rangle})$$

$$= \lim n^{-1} \log \mathbb{E}(e^{n f(\Xi_n)})$$

$$= \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \{ \langle t, x \rangle - \Lambda^*(x) \},$$

Tämä tosin tiedettiin muutenkin (lemma 3.10). Nähdään myös, että $\Lambda(t)$ on raja-arvo (eikä lim sup) pisteissä $t \in \mathring{D}(\Lambda)$.