Tutkiva oppiminen matematiikassa

Helsingin yliopisto
Matemaattis-luonnontieteellinen tiedekunta
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Aineenopettajan koulutusohjelma
Pro gradu -tutkielma
Matematiikka
16.05.13
Mikko Matias Hirvonen

Ohjaaja: Mika Koskenoja

Sisällysluettelo

1. Johdanto

1.1. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet

*Työtapojen tehtävänä on kehittää oppimisen, ajattelun ja **ongelmanratkaisun taitoja**, työskentelytaitoja ja **sosiaalisia taitoja** sekä aktiivista osallistumista. Työtapojen tulee edistää **tieto- ja viestintätekniikan taitojen kehittymistä**.*

...

*Opetuksen tulee kehittää oppilaan **luovaa** ja täsmällistä ajattelua, ja sen tulee ohjata oppilasta löytämään ja muokkaamaan **ongelmia** sekä etsimään ratkaisuja niihin.*

...

*Oppiminen on seurausta oppilaan **aktiivisesta ja tavoitteellisesta** toiminnasta, jossa hän aiempien tietorakenteidensa pohjalta käsittelee ja tulkitsee opittavaa ainesta.*

...

*Oppiminen on kaikissa muodoissa aktiivinen ja päämääräsuuntautunut, itsenäistä tai yhteistä **ongelmanratkaisua** sisältävä prosessi.*

...

*Konkreettisuus toimii tärkeänä apuvälineenä yhdistettäessä oppilaan kokemuksia ja ajattelujärjestelmiä matematiikan abstraktiin järjestelmään. Arkipäivän tilanteissa eteen tulevia **ongelmia**, joita on mahdollista ratkoa matemaattisen ajattelun tai toiminnan avulla, tulee hyödyntää tehokkaasti. **Tieto- ja viestintätekniikkaa** tulee käyttää oppilaan oppimisprosessin tukemisessa*

...

*Perusvalmiuksiin kuuluvat arkipäivän matemaattisten **ongelmien mallintaminen**, matemaattisten ajattelumallien oppiminen sekä muistamisen, keskittymisen ja **täsmällisen ilmaisun harjoitteleminen**.*

...

Tämän tutkielman tarkoitus on kuvailla, mitä tutkiva oppiminen ja tutkiva matematiikka on ja voisi olla. Tutkielmassani pyrin selvittämään avainhenkilöiden eli matematiikan opettajien matematiikan oppimiseen ja opettamiseen liittyvien uskomusten ja tutkivan oppimisen soveltamisen välistä yhteyttä. Lisäksi selvitän, miksi tutkivalla matematiikalla tulisi olla tukevampi asema opetuksessa ja oppimisessa. Pyrin myös käsittelemään tutkivaa oppimista kriittisesti ja tiedostaen, että oppimistyylejä on monia erilaisia eikä tutkiva oppiminen välttämättä ole kaikille tai kaikissa ryhmissä ja olosuhteissa paras vaihtoehto.

Edellä olevat opetussuunnitelmien perusteiden lainaukset heijastavat aikamme käsitystä ihmisen oppimisesta sosiokonstruktivistisena ongelmanratkaisuprosessina. Toisin sanoen, opittavaa tietoa ei voi ymmärtää objektiivisena ja muuttumattomana, vaan se on aina yksilön ja häntä ympäröivän sosiaalisen yhteisön vuorovaikutuksessa rakennettua. Lisäksi nykykäsityksen mukaan ongelmanratkaisu on oppimisen kannalta hyvin keskeistä, sillä se aktivoi oppijan omia ajatteluprosesseja ja parhaimmillaan sekä kehittää metakognitiivisia taitoja, että helpottaa opittavan aineksen kytkemistä "oikeaan elämään".

Kaiken kaikkiaan, sekä yhteiskuntamme että oppimiskäsitysten muuttuminen on luonut kysynnän uudenlaisille pedagogisille malleille. Tietoyhteiskunnassa ulkoa opeteltavan ja osattavan tiedon merkityksen voidaan katsoa vähentyneen ja ongelmanratkaisutaitojen sekä ymmärryksen ja uuden tiedon luomisen merkityksen korostuneen. Tutkiva oppiminen pyrkii tarjoamaan nimenomaan pedagogisen mallin, jonka avulla näiden korkeammantasoisten tiedonkäsittelytaitojen hallinta voidaan saavuttaa.

Matematiikka on osittain erittäin kiitollinen, osittain erittäin epäkiitollinen ala soveltaa tutkivaa oppimista. Matematiikan perusluonne sopii hyvin ajatukseen oppimisesta ongelmanratkaisuna, ja matematiikka voidaan nähdä spiraalimaisena rakenteena, jota opiskellessa palataan aina vanhoihin asioihin, syventäen niiden osaamista (aivan kuten tutkivan oppimisenkin rakenne). Toisaalta, monet matematiikan ongelmista ovat ratkaisseet parrakkaat, kreikkaa puhuvat miehet, joilla on ollut paljon vapaa-aikaa. Kyseisten asioiden opettelu aitona ongelmanratkaisuprosessina, murrosikäisten kanssa, pari kertaa viikossa kokoontuen voi olla turhankin haastavaa. Tutkiva oppiminen edellyttääkin opettajalta paljon, aivan uuden työskentelykulttuurin luomisesta alkaen. Kuitenkin, parhaimmillaan tutkiva oppiminen johtaa korkeatasoisiin oppimistuloksiin, syvällisempään asioiden ymmärtämiseen sekä keskeisten käsitteiden todelliseen hallintaan ja kykyyn siirtää osaaminen myös tilanteisiin koululuokan ulkopuolella.

2. Teoreettinen tausta

2.1. Tutkiva oppiminen

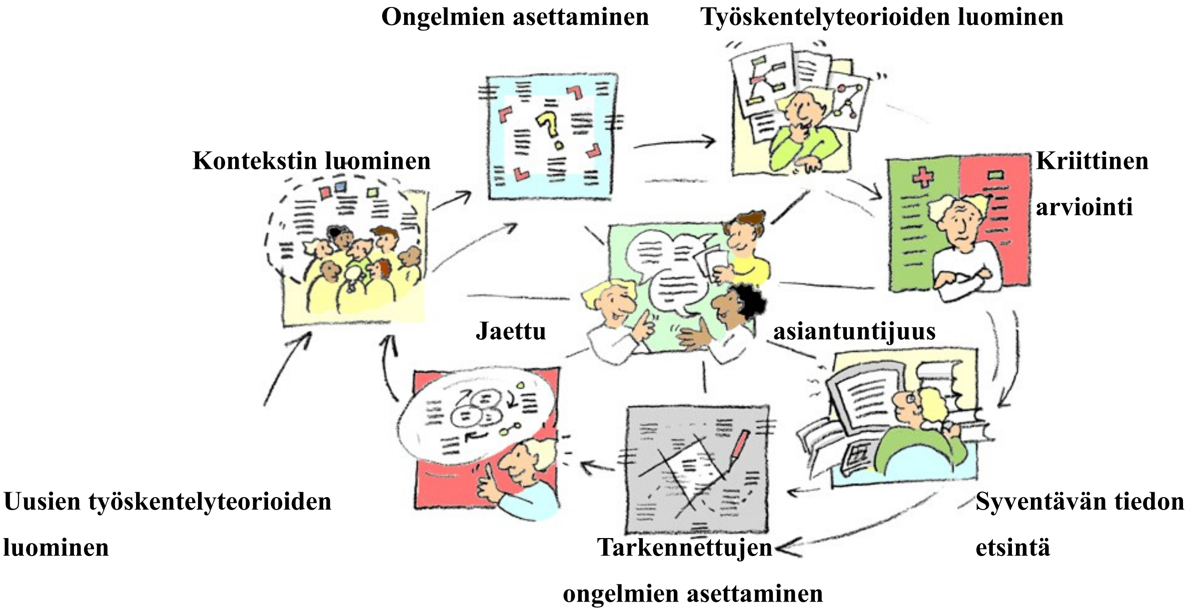
Tutkivan oppimisen mallin ovat luoneet Kai Hakkarainen, Kirsti Lonka sekä Lasse Lipponen, taustavaikuttajina mm. Bereiter (Schools/universities as knowledge building communities), Frederick Bartlett (skeemat - assimilaatio/akkomodaatio) ja Vygotsky (lähikehityksen vyöhyke).

Tutkivalla oppimisella tarkoitetaan oppimisen mallia, jossa opeteltavaa ainesta ei saada opettajalta tai oppikirjasta valmiiksi pureskeltuna, vaan oppija ottaa oppimisestaan isomman vastuun asettamalla opiskeltavaan aiheeseen liittyviä ongelmia, selvittää itselleen ja muille omia ennakkokäsityksiään sekä luulojaan aiheesta ja asteittain syvenevän ongelmanratkaisuprosessin myötä hankkii ja rakentaa itselleen syvemmän ymmärryksen sekä itse opiskeltavasta asiasta, että siitä kuinka se asettuu kaikkeen aikaisemmin opittuun. Tutkiva oppiminen painottaa erityisesti tiedon rakentamista *yhteisöllisenä* prosessina, vuorovaikutuksessa muiden kanssa.

Tutkivan oppimisen taustalla ovat seuraavat perusperiaatteet:

1. **Ymmärtämiseen tähtäävä oppiminen sosiaalisessa vuorovaikutuksessa.**
2. **Oppiminen ongelmanratkaisuna.**
3. **Omien ennakko- tai intuitiivisten käsitysten esittäminen ja pohtiminen.**
4. **Huomion kohdistaminen keskeisiin käsitteisiin ja “suuriin“ ideoihin**
5. **Pyrkimyksenä on ilmiöiden selittäminen.**

Näiden perusperiaatteiden pohjalta on luotu tutkivan oppimisen malli, joka koostuu seuraavista osatekijöistä:



Kuva: http://www.hyvan.helsinki.fi/tutkiva/

Kontekstin luominen

Kontekstin luomisella tarkoitetaan sitä, että oppimiselle luodaan pohja kytkemällä asiat eri tieteenalojen merkityksellisiin kysymyksiin, asiantuntijoiden ratkaisemiin todellisiin ongelmiin tai opiskelijoiden omaan kokemusmaailmaan.

Ongelmien asettaminen

Ongelmien asettamisessa on tärkeä merkitys siinä, että oppilaat ratkaisevat itsensä asettamia ongelmia, mitkä heitä opiskeltavassa ilmiössä ihmetyttävät. Nämä kysymykset asetetaan jatkotyöskentelyn lähtökohdaksi ja tavoitteeksi koko työskentelyprosessille ja tulevalle tiedonhankinnalle. Tämä auttaa oppilaita motivoitumaan ja sitoutumaan tutkivan oppimisen prosessiin. Uutta tietoa ei siis sulauteta suoraan aikaisempiin tietorakenteisiin, vaan se rakennetaan ratkaisemalla tieto-ongelmia sekä luomalla ja arvioimalla omia teorioita ja selityksiä.

Omien työskentelyteorioiden luominen

Näillä työskentelyteorioilla tarkoitetaan muun muassa hypoteesien, selitysten, tulkintojen tai mallien muodostaminen tutkimuksen kohteena olevista ilmiöistä ja asioista, jotka oppilaat itse kirjoittavat. Keskeisenä tavoitteena on rohkaista oppilaita tuomaan omat intuitiiviset käsitykset ja tulkinnat muiden tietoon ja pohdinnan kohteeksi. Tämä tulkintojen esittäminen ennen uuden tiedon hankkimista auttaa tiedostamaan eron oman käsityksen ja uuden informaation välillä. Tavoitteena on rohkaista oppilaita ajattelemaan oppimisen kohteena olevaa ilmiötä sen sijaan, että he passiivisesti omaksuisivat heille välitetyt tiedot.

Kriittinen arviointi

Kriittinen arviointi tarkoittaa sitä, että itseohjautuvat oppilaat arvioivat kriittisesti oman tutkimusprosessinsa edistymistä ja asettavat uusia tavoitteita. Arvioinnin tarkoituksena on kehittää oppimisyhteisön luomia teorioita kiinnittämällä huomiota puutteellisuuksiin ja muihin epäkohtiin. Tässä vaiheessa yhteisö ideoi ja tuottaa uusia ajatuksia, jotka voisivat viedä prosessia eteenpäin ja arvioivat auttavatko ne ongelmana olevan ilmiön ratkaisemisessa. Tähän työskentelyyn sopii hyvin verkkopohjaisen ryhmätyöohjelman hyödyntäminen, jossa kaikki voivat osallistua luotujen selitysten argumentointiin ja kriittiseen arviointiin.

Uuden syventävän tiedon hankkiminen

Uutta tietoa etsitään eri lähteistä, kuten kirjallisuudesta, sähköisistä lähteistä, asiantuntijoiden haastatteluista, kokeiden tekemisestä ja tutkimusaineiston kokoamisesta. Keskeisessä asemassa ovat oppilaan itsensä asettamat ongelmat, hänen aikaisemmat tietonsa ja intuitiivisten teorioiden muodostamisessa syntyneet ongelmat. Tietolähteistä saatavaa tietoa käytetään omien kysymysten ja niille muodostettujen selitysten kehittämiseen. Tietoja ei siis kopioida sellaisenaan. Siksi on tärkeää, että tiedonhaun lähtökohtana ovat oppilaiden tuottamat aidot kysymykset.

Oppilaat voivat esimerkiksi kirjoittaa tietokoneen ääressä muistiinpanoja pienille lapuille, jotka toimivat työskentelyteorioiden kirjoittamisen tukena. Tällä pyritään vähentämään tiedon kopiointia ja lisäämään oppilaiden omaa ajattelua. Kopioinnin ongelmaa voidaan myös välttää tarpeeksi monimutkaisilla tutkimusongelmilla, jolloin oppilaat joutuvat todella etsimään, yhdistämään ja muokkaamaan tietoa pystyääkseen vastaamaan asettamaansa tutkimusongelmaan.

Tutkiva oppiminen on jatkuvasti monimutkaistuva prosessi, jossa opiskelijat luovat haastavampia työskentelyteorioita, luopuvat arkikäsityksistään ja löytävät avainobjekteja, kuten käsitteitä, malleja ja viitekehyksiä, jotka selittävät ja auttavat ymmärtämään tutkimuksen kohteena olevia ilmiöitä.

Tarkentuvien kysymysten kehitteleminen

Uuden tiedon löytäminen johtaa yleensä uusien ongelmien syntymiseen. Tämän voi esimerkiksi aiheuttaa se, että uusi tieto on ristiriidassa oppilaiden omien käsitysten kanssa. Tarkentuvien kysymysten asettaminen auttaa oppilasta menemään syvemmälle ilmiön selittämisessä sekä tutkimuksen lähtökohtana olleeseen kysymykseen vastaamisessa. Tämän vuoksi on erittäin tärkeää saada oppilaat sitoutumaan asettamiensa ongelmien tarkentamiseen. Työskentelyn jatkaminen tarkentavien selitysten löytämiseksi vaatii paljon opettajan ohjausta ja tukea.

Asteittain tarkentuvien teorioiden luominen

Oppimisen kannalta on tärkeää, että oppilaat paneutuvat hankkimaansa teoreettiseen tietoon ja oppimisyhteisöltä saamaansa tukeen, minkä avulla he pystyvät parantamaan selityksiään. Se pystyvätkö oppilaat luomaan monimutkaisia teorioita edellyttää heiltä systemaattista työskentelyä laatimiensa selitysten ja kuvausten kehittämiseksi sekä uuden tiedon hakemista asteittain syvenevinä kierroksina.

Prosessin jakaminen

Tutkivan oppimisen prosessissa jokainen kantaa kortensa kekoon, joten tiedon kehittyminen on jokaisen prosessiin osallistuvan oppimisyhteisön jäsenen vastuulla. Oppilaat rakentavat uusia ajatuksia jäljittelemällä parhaiksi katsottuja kognitiivisia käytäntöjä. Oppilaiden keskinäisen vuorovaikutuksen välityksellä älylliset voimavarat saadaan käyttöön ja sillä voidaan edistää tutkimusprosessin kulkua. Tutkivan oppimisen prosessiin voi osallistua oppilaiden ja opettajan lisäksi kyseisen aihepiirin asiantuntijoita.

Tulosten julkistaminen

Osa tutkivaa oppimista on prosessin tulosten julkistaminen. Julkistamisen muotoja voivat olla erilaiset esitykset kuten seinätaulut, tutkimusraportit, esitelmät tai multimediaesitykset. Näiden tulisi tukea oppilaita käsitteiden määrittelyssä, tiedon soveltamisessa ja tiedon esittämisessä heidän tutkiessaan ongelmia. Ulkoinen esitystapa on kuitenkin toisarvoinen seikka verrattuna niihin käsitteisiin, joiden ymmärtämiseen ja kehittämiseen prosessi tähtää.

(http://www.tutkiva.edu.hel.fi/osatekijat.html)

2.2. Matemaattinen ajattelu

Sosiaalinen konstruktivismi painottaa, ei ainoastaan oppijan aktiivista tiedon konstruointia aikaisempien tietojen pohjalta, vaan myös oppimistapahtuman olevan vuorovaikutteinen ja sosiaalinen tapahtuma. Keskeisenä tapahtumana oppimisen kannalta konstruktivismissa nähdään kognitiivisen konfliktin aikaansaaminen. Toisin sanoen, oppijan aikaisemmat näkemykset ja oletukset opittavasta asiasta haastetaan ja tarvittaessa ne muuttuvat. Tätä kutsutaan käsitteelliseksi muutokseksi. Erityisesti matemaattis-luonnontieteellisissä aineissa tämä on hyvin keskeisessä roolissa opetuksessa.

Tutkivaa oppimista, joka on yksi sosiaalisen konstruktivismin ilmentymä, kuvaillaan usein sosiaaliseksi tiedonrakenteluprosessiksi. Lisäksi tutkiva oppiminen korostaa tehokkaan ja syvällisen oppimisen muistuttavan hyvin paljon asiantuntijoiden muodostaman tiedeyhteisön toimintaa ongelmanratkaisutilanteessa. Lähtökohtaisesti tämän asetelman katsotaan sopivan hyvin matematiikkaan ja luonnontieteisiin yleensä.

Matematiikan oppimisesta puhuttaessa ei tarkoiteta ainoastaan tietojen ja taitojen kartuttamista, vaan myös matemaattisen ajattelutavan omaksumista. Sternberg (1996) jakaa lähestymistavat matemaattiseen ajatteluun seuraavasti:

1. Psykometrinen lähestymistapa
2. Informaation prosessointia tutkiva lähestymistapa
3. Antropologinen lähestymistapa
4. Pedagoginen lähestymistapa
5. Matematiikan lähestymistapa

Määritelmä ei siis ole yksiselitteinen. Kuitenkin, näkökulmasta riippumatta keskeistä matemaattisessa ajattelussa ja oppimisessa voidaan katsoa olevan prosessoitavan tiedon luonne.

Hiebert ja Lefevren (1986) jakavat tiedon **konseptuaaliseen** (käsitteet ja niiden riippuvuudet) ja **proseduraaliseen** (symbolit, säännöt, menetelmät) tietoon. Perinteisissä koulutehtävissä ratkaisu muodostuu proseduurien jonosta, usein sääntöjen mekaanisesta soveltamisesta. Ihanteellisessa oppimisessa ja osaamisessa proseduraalinen ja konseptuaalinen tieto kytkeytyvät saumattomasti toisiinsa - luoden yhtenäisen merkitysten, käsitteiden ja sääntöjen verkon sekä syvempää ymmärrystä. Vain näin voidaan saavuttaa todellista matemaattista **osaamista**, jonka Kilpatrick, Swafford & Findell (2001) puolestaan jakavat viiteen eri osa-alueeseen:

1. Konseptuaalinen eli käsitteellinen ymmärtäminen
2. Proseduraalinen sujuvuus
3. Strateginen kompetenssi eli kyky esittää ja ratkaista ongelmia matemaattisesti
4. Mukautuva päättely eli pystyvyys loogiseen ajatteluun
5. Yritteliäisyys (matematiikkaa tärkeää, "minä pystyn", oma ahkeruus ratkaisee)

Lisäksi Rice (1992) määrittelee matemaattiset ajattelustrategiat seuraavasti:

1. Luokittelu
2. Lukujonotaidot
3. Analogian muodostaminen
4. Deduktiivinen päättely
5. Ongelmanratkaisutaidot

Pehkosen (2003) mukaan koulun matematiikanopetuksen pitäisikin tähdätä sekä laskutaitojen hankkimiseen että ymmärtämiseen, huomioiden että ainostaan edellisen harjoituttaminen ei kartuta jälkimmäistä eikä myöskään toisinpäin. Voidaan kysyä, kuinka näihin tavoitteisiin päästäisiin tutkivan matematiikan avulla.

2.3. Tutkiva matematiikka

Tuoreimmassa teoksessaan Hakkarainen, Lonka ja Lipponen (2008) eivät pidä tutkivaa oppimista enää yksiselitteisesti ”mallina”, vaan laajemmin lähestymistapa, jossa tärkeää on tutkiva asenne maailmaa ja tietoa kohtaan. Tarkkaa ja yksiselitteistä määritelmää tutkivalle oppimiselle on siten hankala muodostaa, mutta yhteistä tutkivaa oppimista hyödyntäville menetelmille on edellä kuvattu tutkiva asenne. Tässä tutkielmassa määrittelen tutkivan oppimisen seuraavasti:

> Tutkiva oppiminen on lähestymistapa, jossa ensisijaista on tutkiva asenne opittavaa asiaa kohtaan. Tutkiva asenne ilmenee siten, että opiskelijat itse tutkimalla ja kokeilemalla etsivät ratkaisua ongelmaan, jonka selvittämiseksi heillä ei vielä ole kaikkia tarvittavia tietoja. Tutkivassa oppimisessa opettaja ohjaa työskentelyä, mutta ei anna suoria vastauksia.

Tämän määritelmän mukaisesti en pidä tutkivassa oppimisessa välttämättömänä alkuperäisen mallin näkemystä, että opiskelijoiden olisi joka tilanteessa itse määriteltävä myös tutkimuskysymyksensä.

Matematiikan osalta kirjallisuudessa esiintyy useita nimityksiä, joiden voidaan katsoa sopivan edellä esitettyyn yleiseen tutkivan oppimisen määritelmään. Tutkivan oppimisen (Hakkarainen, Lonka & Lipponen, 2008) lisäksi tällaisia nimityksiä ovat *ongelmalähtöinen oppimisen malli* (Boud & Feletti, 1998), *avoin lähestymistapa ja tutkimustehtävien käyttö* (Pehkonen, 2003; 2012), *luova ongelmanratkaisu* (Pehkonen, 2012) ja *elämyksellinen matematiikka* (Portaankorva-Koivisto, 2010). Koska kaikki edellä mainitut lähestymistavat voidaan lukea tutkivan oppimisen alle matematiikan osalta, käytän tässä tutkielmassa niille yleisnimitystä *tutkiva matematiikka*. Sen sijaan tutkivaa matematiikkaa tässä yhteydessä ei ole satunnainen käytännön esimerkkien käyttö tai kyselevä opetustyyli ainoana käytettynä tutkivan oppimisen elementtinä.

2.3.1. Luovuus, luova ongelmanratkaisu ja avoin lähestymistapa

Sekä perusopetuksen että lukion opetussuunnitelmien perusteiden voidaan katsoa edellyttävän luovuuden ja ongelmanratkaisutaitojen kehittämistä matematiikassa (kts. edellä, OPS-lainaukset). Tutkiva matematiikka pyrkii muun muassa vastaamaan kritiikkiin koulumatematiikan liiallisesta painottumisesta rutiinitehtäviin ja mekaaniseen laskentoon. Ongelmana perinteisessä koulumatematiikassa kiistämättä onkin, että se ei juurikaan edistä luovuuden kehittymistä vaan ehkäpä jopa päinvastoin – painottaen enimmäkseen sääntöjä ja algoritmeja, ”syöden pois tilaa luovuudelta”. Käytettävissä olevan ajan ollessa rajallinen, liika proseduraaliseen sujuvuuteen painottuminen on luonnollisesti pois myös konseptuaalisesta osaamisesta. Ratkaisuna (tai ainakin parannuksena) tilanteeseen voidaan nähdä tutkiva matematiikka, sillä juuri omaehtoinen, aito ongelmanasettelu ja -ratkaisu kehittää luovuutta ja ongelmanratkaisutaitoja (Pehkonen, 2003; Kwon, Park & Park, 2006; Silver, 1997).

Erkki Pehkonen kokoaa artikkelissaan Tutkiva matematiikan oppiminen peruskoulussa mm. Bishopin (1981) ajatuksia, joiden mukaan matematiikassa todella tarvitaan kahta, toisiaan täydentävää ajattelutapaa: luovaa ajattelua, jolle on tyypillistä intuitio ja analyyttista ajattelua, joka on logiikkapainotteista. Tämä näkyy muun muassa tarkkailtaessa ammattimatemaatikon toimintaa hänen lähestyessään uutta tehtävää, hänelle aitoa ongelmaa.

Aitoa matemaattista ongelmaa tarkastelevan matemaatikon voidaan havaita yleensä aloittavan erikoistapauksilla. Ensimmäiset kokeilut ovat useimmiten satunnaisia, ehkä intuitioon perustuvia, mutta alkavat pian suuntautua sen mukaan, minkä ko. matemaatikko uskoo olevan oikea ratkaisu tai sitä lähellä. Alkuvaiheen yritysten, kokeilujen ja mahdollisten erehdysten perusteella asetetaan mahdollisesti hypoteesi, joka yritetään todistaa oikeaksi. (Pehkonen 2003, 2012). Edellinen kuvaa nimenomaan luovaa ongelmanratkaisuprosessia, ja monet matemaatikot kiistävätkin luovuuden erottamisen matematiikasta (Monna, 1992) ja sen yhdistämisen ainoastaan luoviin aloihin.

Myös ns. avoimet tehtävät on usein mainittu menetelmä edellä mainitun luovuuden edistämiseksi ja ymmärtämisen tason syventämiseksi (mm. Pehkonen 1994). Tehtävän sanotaan olevan avoin, jos sen alku- tai lopputilanne ei ole tarkasti määritetty. Avoimiin tehtäviin kuuluvat mm. arkielämän tehtävät, ongelman asettaminen, ongelmakentät (tai ongelmajonot), ongelmat joissa ei ole kysymystä, projektityöt ja tutkimustehtävät. Yksi mahdollinen tapa luoda avoimia tehtäviä on pyrkiä löytämään mahdollisimman paljon erilaisia ratkaisutapoja muutoin periaatteessa suljettuun tehtävään. (Pehkonen, 1995; 1997).

Avoimien tehtävien luonne arkielämää vastaavina ongelmina luonnollisesti myös helpottaa omaksutun tiedon soveltamista luokan ulkopuolella (siirtovaikutus). Avoimien tehtävien pohtiminen, ongelmien asettelu ja mahdollisten ratkaisujen punnitseminen usein edellyttää lisäksi aktiivista sosiaalista kanssakäymistä, keskustelua ja uusien ajattelutapojen omaksumista, mikä on hyvin linjassa myös tutkivan matematiikan periaatteiden kanssa.

2.3.2. Projektityöt ja pienryhmätyöskentely

Mikäli matematiikan opiskelussa päädytään kokeilemaan projektitöitä (ei suinkaan välttämättömyys), on suositeltavaa aloittaa hyvinkin pienillä, ehkä vain oppitunnin kestävillä projekteilla, sillä tämä helpottaa huomattavasti ajankäytöllisiä haasteita. Näin myös oppilaat on mahdollista totuttaa uuteen, tutkivampaan opiskelutyyliin pikkuhiljaa. Mikäli oletetaan ajankäyttöön ja sopivien luokkatilojen löytämiseen liittyvät haasteet voitetuiksi, ensimmäinen tärkeä askel oppilaan näkökulmasta on aiheen valinta.

Tutkivan matematiikan onnistumisen kannalta on tärkeää valita aihepiiri, joka on käsitteellisesti merkityksellinen sekä riittävän haastava ja monimutkainen - ongelma, joka luontevasti jakautuu tutkittaviin osaongelmiin ja jota voidaan tarkastella useista eri näkökulmista. Lisäksi on etu, mikäli aihepiiri on sellainen, joka kiinnostaa oppilaita ja jota on mukava lähteä tutkimaan. Tutkivan matematiikan yhteydessä voisikin olla luontevaa antaa oppilaiden itse valita aihe joistakin opetussuunnitelman keskeisistä käsitteistä. Jo erikokoisten ympyröiden säteiden, halkaisijoiden ja kehien pituuksien tutkiminen pienryhmätyöskentelynä opettaa π:stä paljon. Myös esimerkiksi suorakulmaisia kolmioita voi tutkia vastaavalla tavalla, Pythagoraan hengessä. Itse asiassa, mitä tahansa matematiikan osa-aluetta voi tutkia antamatta vastauksia suoraan. Epäonnistumisiakin on tämänkaltaisissa kokeiluissa luvassa, johtuen vaillinaisesta oppilaiden perehdytyksestä, vääränlaisesta työskentelyilmapiiristä tai oppimisympäristön antaman tuen puutteesta. Opettajan ammattitaitoa on arvioida, millaisiin projekteihin ryhmät kykenevät.

2.3.3. Kielentäminen

Kun oppilas saa ilmaista opiskeltavan käsitteen sisältöä itse valitsemallaan tavalla (puhumalla omalla terminologiallaan, piirtämällä jne.), niin opettaja ja muut oppilaat saavat kuvan tämän oppilaan käsitteen ymmärtämisestä. Matemaattisen käsitteen kielentäminen on myös osa oppilaan käsitteen konstruointiprosessia, sillä ilmaistessaan muille sisältöä hän joutuu pohtimaan käsitteen keskeisiä piirteitä ja reflektoimaan sekä jäsentämään matemaattista ajatteluaan. Muut oppilaat voivat samalla verrata oppimansa käsitteen sisältöä toisen oppilaan ilmaisuun ja muovata keskustelun avulla sekä omaansa että toisten oppilaiden käsitteen sisältöä. Oppilaan ilmaisussa tulee esille myös hänen asiaan liittyvät uskomuksensa, joita voidaan tarvittaessa muuttaa (Joutsenlahti, 2003).

Tutkivassa matematiikassa kielentäminen on erityisen merkittävässä roolissa sekä oppilaiden työskennellessä ryhmissä että heidän esittäessään omia teorioitaan ja tuloksiaan käsiteltävästä aiheesta. Oppilaiden on tutkimusvaiheessa tärkeä saada käyttää omia, mahdollisesti epästandardeja ilmaisujaan, jolloin luokassa rakennettava matematiikka on oppilaiden matematiikkaa eli oppilaille kehittyy matematiikkaan omistajuus (Francisco & Maher, 2005).

2.3.4. Tieto- ja viestintätekniikan käyttö

Tietokoneiden avulla voidaan vähentää proseduurien opettamiseen tarvittavaa aikaa, ja tämän myötä lisätä konseptuaalisen ymmärtämisen osuutta (Fey, 1989). Lisäksi Suomessa toteutetun MODEM-tutkimuksen mukaan tietokoneavusteiset oppimisympäristöt parhaimmillaan paljastavat mahdollisia puutteita oppilaiden metakognitiivissa taidoissa ja konseptuaalisessa ymmärtämisessä. Tällaisesta hyvä esimerkki on GeoGebra - dynaaminen geometriaohjelma, joka mahdollistaa mm. funktion yhtäaikaisen geometrisen ja algebrallisen tarkastelun, vieläpä järkevässä ajassa. Omassa työssäni olen huomannut myös oppilaiden innon tutkia mm. funktioita omien älypuhelimiensa sovelluksilla. Haapasalo & Siekkinen ovat tutkimuksessaan v. 2005 saaneet tukea seuraaville tieto- ja viestintätekniikkaa koskeville väitteille:

1. Teknologian avulla voidaan parantaa opettajien ja oppilaiden metakognitiivisia taitoja.
2. Teknologian integrointi on tarpeellista, vaikka se tuntuisikin aikataulujen puitteissa vaikealta.
3. TVT:tä hyödyntävässä opetuksessa voidaan hyötyä suunnittelemalla oppimisen periaatteista.(Oppimista, joka tapahtuu luomiseen tms. suunnittelupohjaiseen aktiviteettiin osallistumisen kautta.)
4. Teknologian avulla oppimista voidaan siirtää myös vapaa-ajalle (verkko-oppimisympäristöt).
5. Teknologiaopetus opettajakoulutuksessa on parasta toteuttaa integroimalla teknologia luonnolliseksi osaksi opiskelijoiden pedagogista ajattelua.

Tieto- ja viestintätekniikan käyttöä käsitellään tarkemmin jäljempänä, GeoGeobran yhteydessä.

2.3.5. Tutkiva matematiikka erityisopetuksessa

Matematiikan erityisopetuksessa tukea voidaan antaa mm. laskemisen taitoihin, aritmeettisiin perustaitoihin ja matemaattisten suhteiden ymmärtämiseen. Usein ainakin osa tästä tuesta sisältää tutkivan oppimisen menetelmiä. Matemaattisiin oppimisvaikeuksiin liittyy nimittäin voimakkaasti vaikeus hahmottaa matematiikan täysin abstrakteja käsitteitä ja liittää niitä "oikeaan" maailmaan. Tutkiva oppiminen tarjoaakin hyviä apuvälineitä käsitteiden konkretisoimiseen ja tämän myötä omaksumiseen etsimisen ja tutkimisen kautta. Lisäksi tutkivalle oppimiselle ominainen oikeiden ongelmien muotoilu, ratkaisu ja reflektointi sekä kehittää oppilaiden usein puuttellisia metakognitiivisia taitoja että auttaa heitä ymmärtämään matematiikan käytön merkityksen arkielämässä. Useimmat erityisopetusta tukevat pelit, leikit ja ohjelmistot onkin toteutettu tutkivan oppimisen hengessä, oppilaan luontaiseen uteliaisuuteen vedoten.

2.3.6. Arviointi tutkivassa matematiikassa

Tutkiva oppiminen tuo vaatimuksen tarkastella ymmärrystämme arvioinnista, sillä tutkiva oppiminen perustuu uusille käsityksille ihmisestä, tiedosta, oppimisesta ja opetuksesta. Koko tutkivan oppimisen ajatuksen tulee olla kauttaaltaan linjassa näiden käsitysten kanssa - siis myös ymmärryksen arvioinnista (Kalli, 2007). Samalla linjalla jatkaa Hakkarainen, Lonka & Lipponen toteamalla, että perinteisten arviointimenetelmien käyttö tutkivan oppimisen yhteydessä johtaa lopulta vain pyrkimykseen pärjätä kokeessa tai tentissä sirpaletietoa opettelemalla. Arvioinnin pitäisikin olla monitasoista, keskittyen ainakin seuraaviin seikkoihin:

1. Millaisia kysymyksiä oppilaat pystyvät asettamaan aihepiiristä
2. Oppimisen yhteisöllisyyden arviointi
3. Ymmärtämisen syvenemisen arviointi
4. Autenttinen arviointi (tutkimusraportit yms.)

Arvioinnissa tuleekin jatkuvasti pitää mielessä,että mikäli keskitytään liiaksi projektin lopputuloksen arviointiin, itse prosessin ja opiskelijan oman ajattelun kehitys jää helposti toissijaiseksi.

3. Tutkiva matematiikka käytännössä

Sanayhdistelmä tutkiva oppiminen nostaa monella opettajalla karvat pystyyn. On erittäin haastavaa lähteä soveltamaan taas yhtä uutta opetusmenetelmää. Mistä on kysymys? Mitä vikaa on vanhoissa menetelmissä? Kuinka soveltaminen käytännössä onnistuu? Mitkä ovat suurimmat haasteet? Kuinka tutkivasta oppimisesta saadaan täysi hyöty irti?

Tutkiva matematiikka vaatii kokonaan uuden toimintakulttuurin luomisen. Tutkivan matematiikan onnistumisen kannalta on hyvin keskeistä luoda ilmapiiri, jossa oppilaat uskaltavat esittää "tyhmiäkin" kysymyksiä, arvailla, esittää mielipiteitä, kuunnella ja arvostaa toisten mielipiteitä sekä ennen kaikkea ajatella itse. Lisäksi tutkivan matematiikan tiellä on opettajien ja oppilaiden skeptisyys, lukujärjestystekniset ongelmat sekä mahdollisiin projekteihin tarvittavat tilat ja niiden järjestys tietokoneineen. Kuinka nämä haasteet sitten voitetaan? Kuinka oppilaat saadaan soveltamaan tutkivan matematiikan menetelmiä?

Sovellettaessa tutkivaa matematiikkaa tiedonrakenteluroolit luokassa poikkeavat hieman totutusta. Menestyksekkään työskentelyn saavuttamiseksi opettajan tuleekin tehdä selväksi oma roolinsa konsultoivana ohjaajana sekä oppilaiden rooli ammattimaisesti toimivana tutkimusryhmänä, joka itse pyrkii löytämään vastaukset ongelmiin. Oppilaiden on myös tärkeä ymmärtää, miksi tutkitaan ja keskustellaan eikä kuunnella opettajan luentoa vanhaan hyvään malliin, ja mitkä ovat periaatteet tutkivan matematiikan taustalla.

"Kun tutkivan oppimisen projekti aloitetaan, käsiteltävä aihe pitää ankkuroida todellisen maailman aitoihin ongelmiin." (Hakkarainen, Lonka & Lipponen, 2008). Kiinnostuakseen aiheesta ja halutakseen tutkia aihetta, on hyvin tärkeää, että oppilas ymmärtää aiheen merkityksen ja sen roolin isommassa kokonaisuudessa, hahmottaa sen paikan maailmassamme. Tämä voi puolestaan tapahtua videoilla, lehtijutuilla tai vaikkapa tarinoilla elävästä elämästä - pääasia että aihepiiri ja työ saa oppilaan mielessä merkityksen ja yhteyden aikaisemmin opittuun ja omaksuttuun. Aivan liian usein oppilaat opettelevat irrallisia kokonaisuuksia ulkoa, osaamatta sitten kuitenkaan siirtää oppimaansa todelliseen elämään, mikä onkin perinteisten opetustyylien suuria heikkouksia. Mikäli oppilas saadaan ymmärtämään opiskeltavan aiheen kytkös arkielämään, oppimistulokset ovat parempia ja siirtovaikutukset tehokkaampia.

Oppilaat miettivät ja ihmettelevät elämää päivittäin ja pystyvät asettamaan hyvin korkeatasoisia, omasta pohdinnasta kumpuavia ongelmia. He myös muodostavat teorioita ja potentiaalisia ratkaisuja ongelmiin. Tämä olisi ajatuksena myös tutkivan matematiikan toteutuksessa. Ajatus on kuitenkin erittäin haastava. Oppilaat pelkäävät esittää mielipiteitään ja teorioitaan, kukaan ei halua leimautua "tyhmäksi", ja perinteisesti oikea vastaus on se oppikirjassa esitetty. Koulussa kysymyksiä esittävätkin tyypillisesti ne, jotka jo osaavat asiat ja he, jotka haluaisivat tietää, eivät uskalla kysyä. Tutkivan matematiikan vaatiman toimintakulttuurin luomisen tuleekin alkaa jo heti ensimmäisellä oppitunnilla - oppilaita tulee rohkaista esittämään ajatuksiaan, ja näitä ajatuksia tulee arvostaa avoimesti. Lisäksi pelisääntöjen tulee olla selvät - omasta ajattelusta ja rohkeudesta palkitaan, oli vastaus oikea tai väärä (ehkä oikeaa ja väärää ei edes ole). Saadakseen oppilaat toimimaan tutkivan matematiikan edellyttämällä tavalla on heidän tärkeä ymmärtää, että ajattelu ja ymmärrys todellakin kehittyy vain omia käsityksiä esittämällä ja hiomalla, yrittämällä ja joskus epäonnistumallakin - tässä on myös palautteen antamisen tyyli keskeisessä roolissa. Edellä mainitun kulttuurin luomisen voi hyvin aloittaa pehmeästi, esimerkiksi nimettömillä, lapuille kirjoitettavilla mielipiteillä ja ajatuksilla.

Tutkiva matematiikka ei kuitenkaan ole vain omien käsitysten esittämistä tai teorioiden luomista tyhjästä. Olennainen osa tutkivan oppimisen prosessia on tiedon etsintä ja erityisesti sen jalostaminen. Nykyään on helppo etsiä tietoa - vaikeaa on löytää sopivaa, tarkoituksenmukaista tietoa. Internet on ehtymätön lähde ja monet asiantuntijatkin ovat vain sähköpostin päässä, maailma on pienentynyt. Tämä on kuitenkin kaksiteräinen miekka - tietoa on valtavasti eikä läheskään kaikki ole olennaista eikä välttämättä edes oikeaa tietoa. Voidaan myös kysyä, onko tarkoituksenmukaista etsiä matematiikan oppikirjasta löytyvää tietoa muualta. Oppilaita on joka tapauksessa aktiivisesti opastettava sekä tiedonhaussa että tiedon suodattamisessa - auttaa löytämään se olennainen omiin tarpeisiin. Lisäksi, kuten edellä mainittiin, tietoa tulee jalostaa; sitä tulee kehitellä ja siitä tulee etsiä vastauksia omiin kysymyksiin. Oppikirjojen käytön yhtenä ongelmana voidaankin nähdä liian valmiiksi pureskeltu tieto. Edellä mainitun pohjalta oppilas tai oppilaat osaavat parhaassa tapauksessa kehittää aikaisempia teorioitaan edelleen, luoda ehkä jopa uusia teorioita. Tärkeä osa tutkivan oppimisen prosessia onkin tietynasteinen rakentava kriittisyys sekä omaa että muiden tietoa kohtaan - tällöin tietoisuus kritiikin mahdollisuudesta yhdistettynä avoimeen keskustelukulttuuriin saa oppilaat sekä jäsentämään tietonsa huolellisesti että perustelemaan löytämäänsä ja keksimäänsä. Lisäksi tämä pakottaa miettimään itsekin syitä asioiden taustalla - kysymään miksi ja miten. Suoraan kopioidut, muiden ajatukset eivät ole hyväksytty oikotie onneen.

Olennaisena osana tutkivan matematiikan käytänteitä voidaan pitää myös edellä mainittua tieto- ja viestintätekniikkaa. Oppilaiden omaksuttua tutkivan matematiikan mallin teoriassa, on tietotekniikka verraton apu. Sen lisäksi, että oppilaat usein nauttivat ja innostuvat päästessään työskentelemään tietokoneilla, tarjoaa uusi tekniikka sekä hyviä tiedon tuottamisen ja tutkimisen välineitä että yhteisöllisen oppimisen välineitä. Itse konkreettista toteutusta helpottaa, mikäli on mahdollisuus käyttää valmiita oppimisympäristöjä, joissa oppilaat voivat mm. jakaa tietoa ja kommentoida toisten tuottamaa tietoa. Lisäksi tutkivan oppimisen malli edellyttää jatkuvaa tiedonhakua ja jo tuotetun muokkausta, mikä käytännössä tarkoittanee juuri tietokoneiden käyttöä.

Markus Hähkiöniemi (2011) kuvaa seuraavassa yhden mahdollisen tutkivan matematiikan oppitunnin rakenteen.

3.1. Tutkivan matematiikan mukaisen tunnin rakenne

Suomessa tyypillisen matematiikan tunnin rakenne on seuraava: yleensä opettaja ensin opettaa uuden asian ja näyttää esimerkkejä, minkä jälkeen oppilaat harjoittelevat käyttämään opetettua asiaa ratkaistessaan tehtäviä kirjasta (Savola, 2008). Tutkivassa matematiikassa sen sijaan tunti muodostuu alustus-, tutkimus- ja koontivaiheesta (Stein, Engle, Smith & Hughes, 2008).

3.1.1. Alustusvaihe

Alustusvaiheessa opettaja esittelee tehtävät mutta ei kuitenkaan esitä valmiita ratkaisumenetelmiä tai anna esimerkkejä. Alustusvaiheessa opettaja huolehtii, että oppilaat ymmärtävät tehtävät. Opettaja voi myös korostaa tehtävien merkityksellisyyttä ja motivoida oppilaita. Tarvittaessa voidaan myös kerrata joitakin aiemmin opittuja asioita niin, että tehtävät eivät kuitenkaan muutu mekaaniseksi laskemiseksi. Varsinkin, jos tutkiva matematiikka on oppilaille uusi työskentelymuoto, voi opettaja myös keskustella työtavoista. Oppilaita voi esimerkiksi rohkaista keksimään luovasti erilaisia ratkaisumenetelmiä ja keskustelemaan keskenään.

3.1.2. Tutkimusvaihe

Tutkimusvaiheessa opiskelijat ratkaisevat ryhmissä (2–3 hlö) tehtäviä opettajan kierrellessä ohjaamassa heidän työskentelyään. Tutkimusvaiheessa tärkeintä on, että opettaja kuuntelee oppilaita ja on aidosti kiinnostunut heidän ajattelustaan. Opettaja voi painottaa ajattelun merkitystä oikean vastauksen sijasta kysymällä oppilailta perusteluja tai miten he päättelivät ratkaisunsa. Erityisesti kun oppilaat kysyvät onko heidän vastauksensa oikein, on tarkoituksen mukaista olla vastaamatta ja kysyä oppilailta esimerkiksi miten he sen päättelivät. Opettaja voi sitten kehua oppilaiden päättelyä tai kiinnittää heidän huomionsa johonkin tarkennusta kaipaavaan kohtaan. Välttämällä ottamasta kantaa oppilaiden vastausten oikeellisuuteen opettaja rakentaa matemaattista kulttuuria, jossa oikean vastauksen sijasta tärkeintä ovat perustelut. Opettajan tehtävänä tutkimusvaiheessa on siis ohjata oppilaita ”oikeanlaiseen” matemaattiseen työskentelyyn. Lisäksi on tärkeää motivoida, kannustaa, aktivoida ja kehua oppilaita. Oppilaiden kehumisessa tulee kiinnittää huomiota siihen, että ei kehu oppilasta itseään esimerkiksi fiksuudesta vaan kehuu hänen työskentelyään. Tällä pyritään vahvistamaan oppilaan uskomusta oman työn merkityksestä matematiikan oppimisessa. Tutkivassa matematiikassa syntyy helposti tilanteita, joissa aiemmin heikosti matematiikassa menestynyt oppilas keksii itse jonkin ratkaisumenetelmän. Tällöin opettajan kannattaa käyttää tämä tilanne oppilaan itsetunnon vahvistamiseen ja oppilaan innostamiseen. Näin opettaja voi muuttaa niiden oppilaiden asenteita, jotka luulevat, että he eivät osaa matematiikkaa.

Kun opettaja ohjaa oppilaita tutkimusvaiheessa, hänen tulisi välttää paljastamasta ratkaisumenetelmää, mutta kuitenkin ohjata oppilasta. Hähkiöniemi ja Leppäaho (2010, 2011) ovat havainnollistaneet asiaa erottamalla kolme ohjaamisen muotoa:

a) Aktivoiva ohjaus, jossa opettaja kiinnittää huomiota oppilaan ratkaisussa olennaiseen asiaan ja johdattelee oppilasta tarkastelemaan sitä. Tällaisia olennaisia asioita ovat esimerkiksi perusteleminen, teknologian rajoitteiden ymmärtäminen, siirtyminen kokeilemisesta päättelemiseen, ratkaisun syventäminen, yhteyksien rakentaminen ja yllättäen avautuvien tutkimusmahdollisuuksien hyödyntäminen.

b) Passivoiva ohjaus, jossa opettaja kiinnittää huomiota olennaiseen asiaan oppilaan ratkaisussa, mutta hän myös esittää itse suoraan ratkaisumenetelmän tai pyytää oppijalta muita ratkaisutapoja ilman motivointia. Tällä tavoin opettaja ”passivoi” opiskelijan ratkaisutilanteessa ja vie opiskelijalta mahdollisuuden ongelmanratkaisuun.

c) Pinnallinen ohjaus, jossa opettaja ei kiinnitä huomiota olennaiseen asiaan oppilaan ratkaisussa tai esittää oppilaan ratkaisuun liittymättömiä kommentteja omista lähtökohdistaan käsin.

Esimerkiksi jos opettaja huomaa oppilaan saaneen johonkin tehtävään vastauksen, voi opettaja käyttää aktivoivaa ohjausta pyytämällä oppilasta selittämään, mistä hän tietää vastauksen olevan oikein. Samassa tilanteessa opettaja käyttää passivoivaa ohjausta, jos hän itse selittää miksi vastaus on oikein. Pinnallisessa ohjauksessa opettaja ei taas ollenkaan kiinnitä huomiota vastauksen perustelemiseen vaan esimerkiksi toteaa vastauksen olevan oikein.

Tutkivassa matematiikassa opettaja toimii eräänlaisena orkesterin johtajana, joka organisoi työskentelyä ja huolehtii, että tutkimustehtävien parissa kehitetyt ideat suppenevat kohti standardia matematiikkaa (vrt. Ball 1993). Siksi opettajan onkin tärkeää ohjata oppilaita vaikka he eivät kysyisikään neuvoa.

3.1.3. Koontivaihe

Koontivaiheessa opettaja pyytää opiskelijoita esittämään ratkaisumenetelmiään ja johtaa koko luokan yhteistä keskustelua. Koontia voi tehostaa, jos opettaja jo tutkimusvaiheessa laatii suunnitelman siitä mitä ryhmiä ja missä järjestyksessä hän pyytää esittämään ratkaisujaan (Stein ym., 2008). Valinnan perusteena voi olla esimerkiksi erilaiset ajattelutavat tai merkinnät, potentiaalisten virhekäsitysten esille tuleminen, menetelmien tehokkuus tai perustelujen syvällisyys. Tässä vaiheessa on tärkeää saada oppilaat selittämään ratkaisujaan ja ottamaan kantaa muiden ratkaisuideoihin. Opettaja nostaa ratkaisuista olennaiset ideat esille ja korostaa, mitä niistä opitaan. Koontivaiheessa opettaja myös tiivistää tunnin opetuksen ja ottaa käyttöön standardit merkinnät niin, että ne pohjautuvat oppilaiden ratkaisuihin. Opettaja voi esimerkiksi kirjoituttaa oppilaiden vihkoihin teoreeman tai määritelmän. Näin opettaja ”virallistaa” opitun asian. Tavoitteena on, että oppilaille jää selvä kuva siitä, mikä tunnin opetus oli ja mikä on lopullinen muotoilu esimerkiksi jollekin teoreemalle. Jos koontivaihetta ei ole, on vaarana että oppilaiden tutkimukset jäävät irrallisiksi tai he jäävät epätietoisiksi siitä mikä opittava asia oli.

3.2. Geogebra

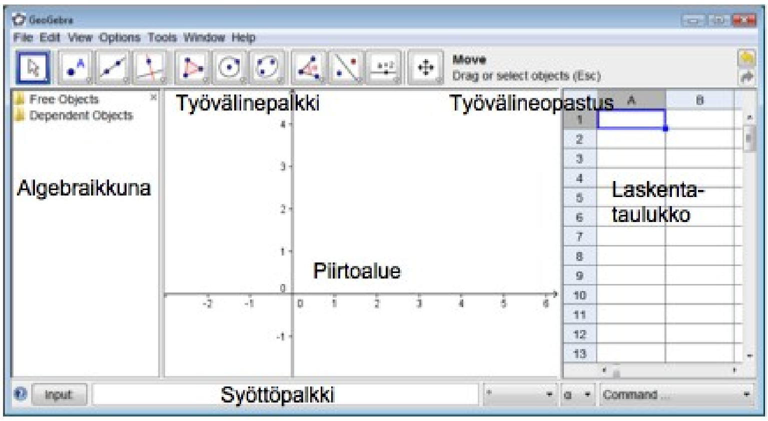
GeoGebra on sellaisenaan hyvin voimakas tutkivan matematiikan työkalu. GeoGebra on opetuskäyttöön tarkoitettu dynaaminen matematiikkaohjelmisto. Vastaavia muita ohjelmistoja ovat mm. Cabri, Geometers' Sketchpad ja GeoNext. GeoGebrassa on yhdistetty geometriaan algebraa, funktioita sekä differentiaali- ja integraalilaskentaa.

GeoGebra sisältää interaktiivisen geometrian järjestelmän, jota käyttäen on mahdollista luoda hiiren avulla piirtoalueelle konstruktioita, jotka voivat koostua yhtä lailla pisteistä, viivoista ja kartioleikkauksista kuin vektoreista ja funktioiden kuvaajista.

Yhtälöitä ja pisteitä voidaan syöttää GeoGebralle suoraan syöttökentän kautta. GeoGebralla onkin geometrian osaamisen lisäksi taito käsitellä lukuja, vektoreita ja pisteitä muuttujina. Se osaa määrittää funktioiden derivaatat ja integraalit sekä mm. lukujen keskiarvon.

Geogebrassa on monta tapaa matemaattisten objektien näyttämiseen: graafinen piirtoalue, numeerinen algebraikkuna ja laskentataulukko. Ne tarjoavat kolme erilaista esitystapaa matemaattisten objektien näyttämiseen: graafisesti (pisteinä, kuvioina, käyrinä jne.), algebrallisesti (koordinaatteina, yhtälöinä jne.) ja taulukkolaskentasoluina. Vastaavasti kutakin piirtoalueeseen piirrettyä objektia vastaa aina lauseke algebraikkunassa. Itse asiassa kullakin objektilla on tietty ominaisuus, joka on esillä algebraikkunassa: pisteellä koordinaatit, janalla pituus, suoralla yhtälö, funktiolla lauseke, monikulmiolla pinta-ala ja niin edelleen. Kaikki saman objektin esitystavat liittyvät toisiinsa dynaamisesti niin, että minkä tahansa esitystavan muuttaminen muuttaa myös muita esitystapoja. Muutettaessa objektia ei siis ole tarpeen tietää, millä tavalla se on alunperin luotu.

Piirtoalueen objekteja hallitaan hiiren avulla tarjolla olevia työkaluja käyttäen. Syöttökentän kautta, näppäimistön välityksellä, syötetään funktioiden lausekkeet. Syöttökentän kautta on itse asiassa mahdollista antaa kaikki samat komennot, jotka voidaan valita myös hiirellä eri valikoista.



3.2.1. GeoGebran käyttö

Laitamäki (2009) jakaa GeoGebran käyttötavat seuraavasti:

•**Demonstrointi ja opetettavan asian visualisointi:** Opettaja käyttää ohjelmaa perinteisen opetuksen tukena. Opettaja voi suunnitella työtiedostoja etukäteen havainnollistaakseen oppitunnin aiheita. Koska GeoGebra-tiedostoja voi luoda nopeasti, opettaja pystyy suunnittelemaan ja toteuttamaan oppitunnin aikana työtiedostoja, jotka havainnollistavat mahdollisesti ilmeneviä matemaattisia ongelmakohtia.

•**Oppilaiden omatoiminen matemaattisten objektien tutkiminen:** Tätä tapaa käytetään erityisesti oppilaiden proseduraalisen ja konseptuaalisen tiedon yhdistämiseen. GeoGebra mahdollistaa uudentyyppisten matemaattisten tehtävien keksimisen. Tehtävät voivat olla esimerkiksi matematiikan teorioiden dynaamisia tutkimuksia. Lisäksi oppilaat voivat tietysti käyttää GeoGebraa tavanomaisten tehtävien tekemisen apuna.

•**Geometristen objektien ”harppi-viivain” ja muiden matemaattisten objektien konstruointi:** GeoGebralla tuotetuilla harppi-viivain konstruktioilla on omat etunsa suhteessa paperilla tuotettuihin konstruktioihin.

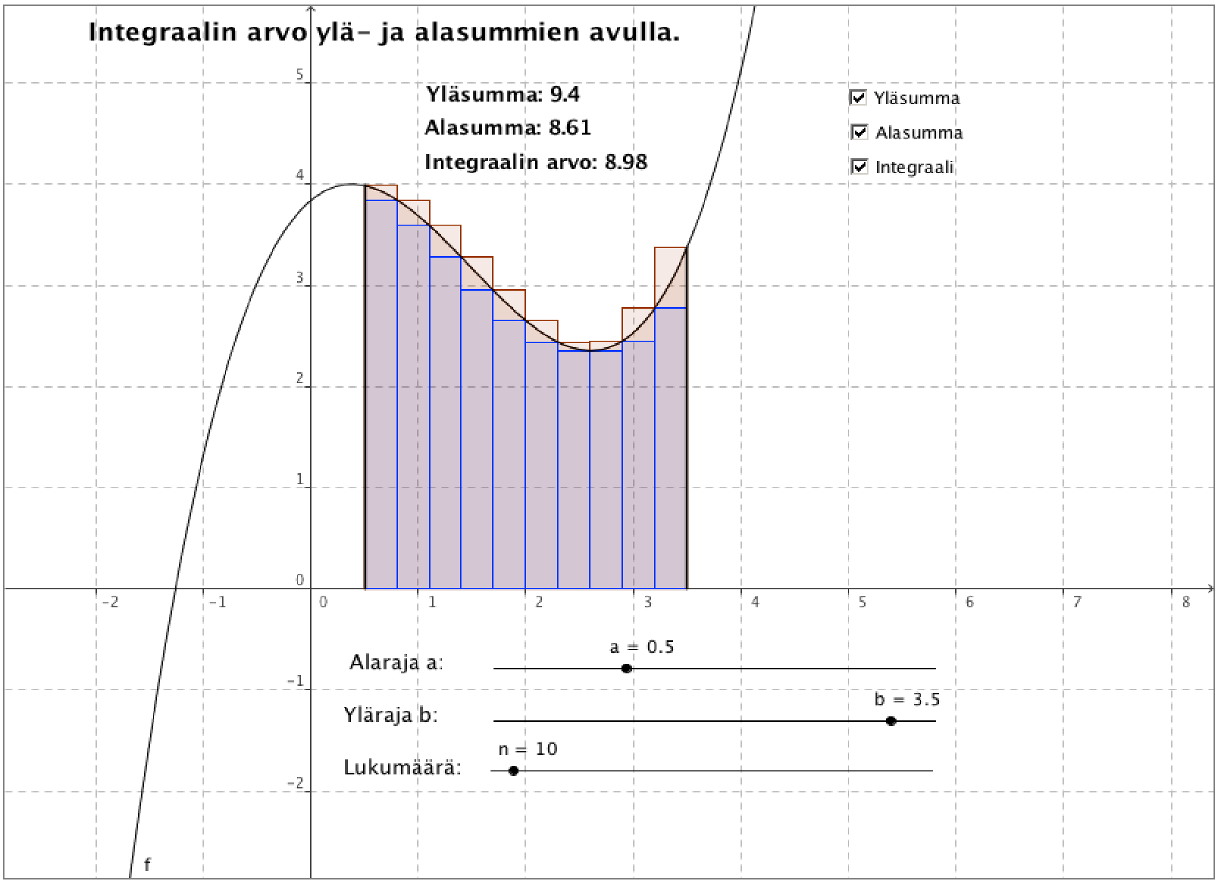
•**(Etä)opetusmateriaalien luominen:** Ohjelman avulla on helppo luoda dynaamisia työtiedostoja verkkoon.

Hähkiöniemi (2011) puolestaan toteaa GeoGebran käytöstä seuraavaa: Opettajan on helppo havainnollistaa GeoGebralla matematiikan käsitteitä. Kuitenkin oppiminen on tehokkaampaa, jos oppilaat itse saavat tutkia matematiikkaa GeoGebralla. Tutkimusten tavoitteena on oppia matematiikkaa, ei ohjelman käyttöä. Samoin tutkimusten tulee olla oikeita tutkimuksia, joissa oppilaat joutuvat ajattelemaan, sen sijaan, että tehtäisiin vain ohjeiden mukaan. Tutkimukset täytyy myös muotoilla niin, että oppilailla on selkeä matemaattinen ongelma. Tehtäväksi ei käy: ”raahaa liukua ja katso mitä tapahtuu”. Lisäksi tehtävien ratkaisemiseen täytyisi sisältyä myös deduktiivista päättelyä empiirisen havainnoinnin lisäksi.

Todettakoon tässä yhteydessä, että vaikka tämän tutkielman käsittely GeoGebran osalta rajoittuu funktion käsitteen opettamiseen ja käsittelyyn tutkivassa matematiikassa, on mielikuvitusta omaavan opettajan mahdollista hyödyntää GeoGebraa lähes millä tahansa yläkoulun tai lukion matematiikan osa-alueella, mistä seuraavassa jokunen esimerkki. Luonnollisesti saavutettava hyöty vaihtelee aihepiirin mukaan.

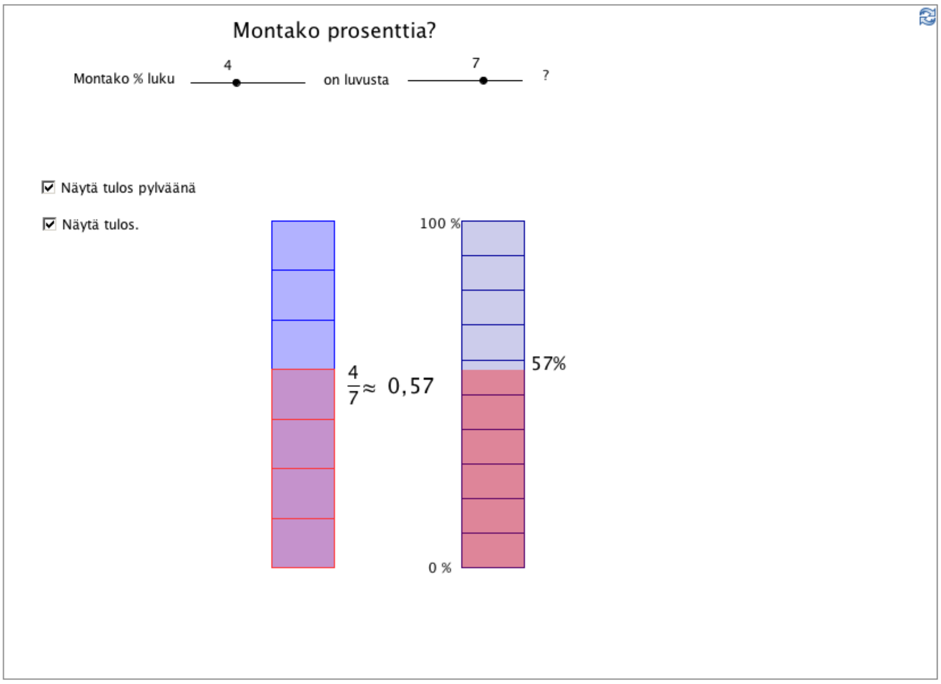
Riemannin summat

Voit muuttaa integroinnin ala- ja ylärajaa sekä palkkien lukumäärää.



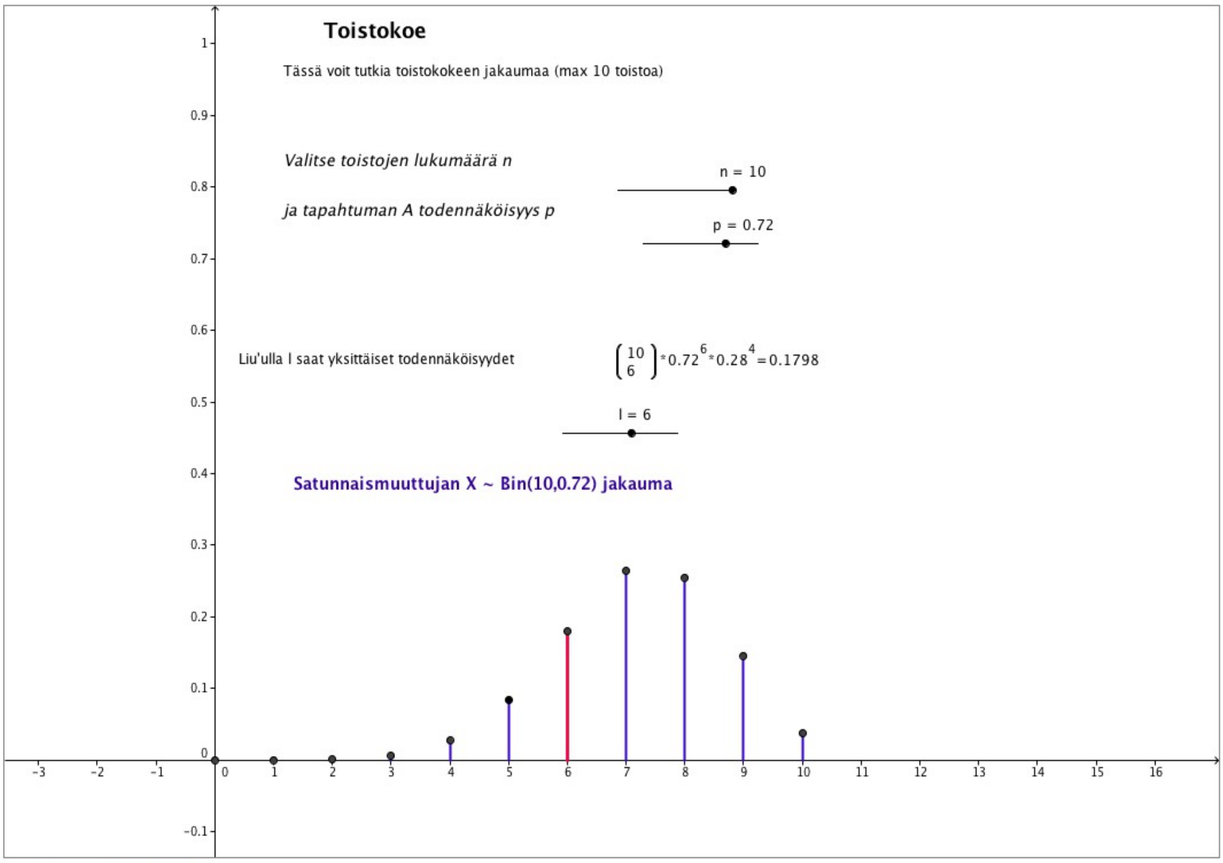
Erkki Luoma-aho, Luotu GeoGebra

Prosenttilaskentaa



Hannu Mäkiö, Luotu GeoGebra

Binomijakauma



Tapio Heikkinen, Luotu GeoGebra

3.3. Funktiot tutkivassa matematiikassa

3.3.1. Opetussuunnitelma

Opetussuunnitelma asettaa funktioiden käsittelylle yläkoulussa seuraavat vähimmäisvaatimukset:

Funktiot
- riippuvuuden havaitseminen ja esittäminen muuttujien avulla (7., 8. tai 9. luokka)
- funktion käsite
- yksinkertaisten funktioiden tulkitseminen ja niiden kuvaajien piirtäminen koordinaatistoon (7., 8. tai 9. luokka)
- funktionkuvaajan tutkimista: funktion nollakohta, suurin ja pienin arvo, kasvaminen ja väheneminen
- lineaarinen funktio (8. tai 9. luokka)
- suoraan ja kääntäen verrannollisuus

3.3.2. Määritelmiä

Relaatio

Relaatio on joukko, jonka jokainen alkio on järjestetty pari. Jos X ja Y ovat joukkoja ja R $\subset X \times Y$, niin R on joukkojen X ja Y välinen relaatio. Jos $R \subset X \times X$, niin sanomme myös, että R on joukon X relaatio.

Kun R on X:n ja Y:n välinen relaatio ja $x \in X$, $y \in Y$, niin sanotaan, että x ja y ovat relaatiossa R jos (ja vain jos) $(x, y) \in R$. Usein merkintä $(x, y) \in R$ korvataan merkinnällä y R x.

Jokaisella $A \subset X$ merkitsemme

$$R(A)=\{y \in Y : \exists a \in A \text{ siten,että } y \, R \, a\}.$$

Sanomme, että R(A) on joukon A kuva relaatiossa R. Alkiolle $x \in X$ käytämme joukosta $R(\{x\})$ lyhennettyä merkintää $R\{x\}$; tällöin $R\{x\} = \{y \in Y : y \, R \, x\}$.

Edellä annettuja merkintöjä käyttäen on kaikilla $x \in X$ ja $y \in Y$ voimassa

$$(x,y) \in R \Longleftrightarrow y \, R \, x \Longleftrightarrow y \in R\{x\}.$$

Kuvaus eli funktio

Olkoot X ja Y joukkoja. Joukkojen X ja Y välinen relaatio $f \subset X \times Y$ on kuvaus, mikäli jokaisella $x \in X$, joukossa $f\{x\}$ on korkeintaan yksi alkio. Relaatio $f \subset X \times Y$ on kuvaus joukolta X joukolle Y , mikäli jokaisella $x \in X$ joukossa $f\{x\}$ on täsmälleen yksi alkio.

Mikäli relaatio f on kuvaus joukolta X joukolle Y , niin merkitsemme $f : X \to Y$; lisäksi määrittelemme jokaisella $x \in X$ joukon Y alkion $f(x)$ kaavan $\{f(x)\} = f\{x\}$ avulla. Panemme merkille, että kuvaus $f : X \to Y$ voidaan esittää muodossa

$$f = \{(x, f(x)) : x \in X\}.$$

Jos f on kuvaus $X \to Y$, niin joukkoa X kutsutaan kuvauksen f määrittelyjoukoksi tai lähtöjoukoksi ja joukkoa Y kutsutaan f:n maalijoukoksi.

Lisäksi, kuvaus $f : X \to Y$ on

1. injektio, mikäli kaikilla $x, z \in X$ ehdosta $f(x) = f(z)$ seuraa, että $x = z$.
2. surjektio, mikäli jokaisella $y \in Y$ on olemassa sellainen $x \in X$, että $f(x) = y$
3. bijektio, mikäli f on sekä injektio että surjektio.

Funktio koulumatematiikassa

Täsmällisen määritelmän pohjalta funktiot määritellään yläkoulussa perinteisesti seuraavasti (Kartio 4(Tammi), opinnot.internetix.fi):

Funktio tarkoittaa matematiikassa kahden suureen välistä riippuvuutta kuvaavaa sääntöä. Funktiosta käytetään yleensä nimeä f (tai g tai h). Funktion muuttuja merkitään sulkeisiin nimen perään, esim. $f(x)$. Sen jälkeen merkitään yhtäsuuruusmerkki ja sääntönä oleva polynomi (tai muu lauseke), esim. $f(x) = 3x^2 – 4$.

f(x):n paikalla voidaan käyttää myös y:tä, $y = 3x^2 - 4$, jolloin *f(x) = y* eli funktion arvo. Tässä x on muuttuja.

Funktion *määrittelyjoukon* muodostavat kaikki ne x:n arvot, joilla funktio on määritelty. Joillakin funktion määrittelyjoukkona ovat kaikki reaaliluvut, joillakin vain esimerkiksi kokonaisluvut.

Funktion *arvojoukon* muodostavat kaikki mahdolliset arvot, joita funktio voi saada (y:n arvot). Joillakin funktioilla arvojoukkonakin voi olla koko reaalilukujen joukko.

Funktion sääntö liittää *jokaiseen määrittelyjoukon alkioon täsmälleen yhden y:n arvon.*

Funktion arvo f(x) tietyssä pisteessä x = a saadaan laskettua sijoittamalla x:n paikalle annettu luku a. Esim. Jos $f(x) = 3x^2 - 4$, niin funktion arvo x:n arvolla 2 on:

$f(2) = 3 \cdot 2^2 -4 = 3 \cdot 4 - 4 = 12 - 4 = 8$.

Funktiolle voidaan piirtää *kuvaaja* xy-koordinaatistoon. Jokaiselle määrittelyjoukon x:n arvolle voidaan laskea vastaava (yksikäsitteinen) y:n arvo edellä kuvatulla tavalla. Näistä saadaan pisteen koordinaatit (x, y). Näiden pisteparien joukko muodostaa funktion kuvaajan. Funktion lausekkeen perusteellakin voidaan jo päätellä paljon funktion kuvaajan muodosta.

Funktion nollakohdalla tarkoitetaan sen pisteen x-koordinaattia, jossa funktion kuvaaja leikkaa x-akselin. Funktion nollakohdassa funktion arvo (eli y) on luonnollisesti nolla. Kaikilla funktioilla ei ole nollakohtia lainkaan ja toisilla niitä taas voi olla useampiakin.

Algebrallisesti funktion nollakohta/nollakohdat saadaan ratkaistua merkitsemällä funktion lausekkeen arvoksi nolla ja ratkaisemalla saadusta yhtälöstä x. Tuota saatua x:n arvoa/arvoja kutsutaan funktion nollakohdaksi/nollakohdiksi.

Funktion merkillä tarkoitetaan funktion arvon (y) merkkiä eli positiivisuutta ja negatiivisuutta.

Funktion *arvo* tarkoittaa y:n arvoa eli kuvaajassa y-koordinaattia. Funktion merkki on siis positiivinen (+), kun funktion kuvaaja on x-akselin yläpuolella. Vastaavasti funktion merkki on negatiivinen (-), kun funktion kuvaaja on x-akselin alapuolella. Kuvaajan avulla voidaan likimääräisesti ilmoittaa, millä x:n arvoilla funktio saa positiivisia arvoja ja milloin negatiivisia arvoja. Algebrallisesti funktion merkki saadaan selville epäyhtälön avulla, ratkaisemalla millä x:n arvoilla $f(x) > 0$ ja millä $f(x) < 0$.

Huomionarvoista on, että yläkoulun matematiikassa ei yleisesti ottaen käsitellä trigonometrisia funktioita varsinaisesti funktioina (ainakaan eksplisiittisesti), eikä myöskään pinta-alojen tai tilavuuksien ajatella olevan jonkin muuttujan funktioita. Käytännössä yläkoulumatematiikka on siis funktioiden osalta enimmäkseen suorien ja paraabelien piirtelyä, näistä johtopäätöksien tekoa sekä jonkin verran algebraa nollakohtien ja funktion merkin selvittämisen muodossa.

3.3.3. Funktion käsitteen opettaminen tutkivan matematiikan tunnilla

Tutkivan matematiikan tunnilla oppilaat oppivat ratkaisemalla matemaattisia ongelmia, kehittämällä ja perustelemalla ratkaisuideoitaan, sekä käsitellessään oppilastovereiden kehittämiä matemaattisia ideoita. Opettajan roolina on auttaa oppilaita kehittämään omia ideoitaan kohti tunnettuja matematiikan käsitteitä ja menetelmiä kuitenkaan paljastamatta valmiita ratkaisuja tai menetelmiä (Hähkiöniemi, 2010).

Seuraavassa tiiviissä esityksessä kuvaan yhden tavan opiskella funktion käsite tutkivan matematiikan tunneilla. Esitys ei ole käsikirjoitus oppitunnille, vaan enemmänkin luonnos lähestymistavasta ja erityisesti käytettävistä tehtävistä. Tunnin yksityiskohtiin, kuten aiheeseen johdatteleviin kysymyksiin, opettajan esittämiin apukysymyksiin, tehtäviin perehdytykseen tai tunnilla käytävään dialogiin ylipäänsä (Hähkiöniemi & Leppäaho (2010): opettajan ohjauksen tasot) ei tässä esityksessä puututa.

<table>
<tr><th>Tunnin kulku</th><th>Tausta-ajatukset</th></tr>
<tr><td>Tunti 1. Aloitus
-Pareittain
-On olemassa jotkin säännöt siten, että:

f(0) = 0   h(-2) = 4
f(1) = 3   h(0) = 0
f(2) = 6   h(1) = 1
f(5) = 15   h(3) = 9
f(x) = ?   h(x) = ?

g(-2) = 0   i(1/3) = -1 1/3
g(0) = 4   i(1/2) = -2
g(1) = 6   i(1) = -4
g(3) = 10   i(x) = ?
g(x) = ?
j(-3) = 6
j(0) = 6
j(2) = 6
j(x) = ?

-Koonti tausta-ajatusten mukaisesti</td><td>- Merkinnät

- Käsitys funktio-nimisen käsitteen olemassaolosta

- Funktion arvo

- Muuttujan arvo

-Heti alussa ajatus siitä, että kaikki funktiot eivät ole a) lineaarisia eivätkä b) kasvavia

-Pohjustusta funktion nollakohdille

-Pohjustusta funktion merkille

-Pohjustusta määrittelyjoukolle

-Murtolukukertausta</td></tr>
<tr><td>Kokonaisuus 2. GeoGebra
-Pareittain
-Koordinaatistossa olevat kuvaajat liittyvät joihinkin funktioihin. Selvitä kuinka. Määrittele lisäksi millaista/mitä funktiota kukin kuvaaja kuvaa. (Kts. liite 3: suoria ja paraabeleja)

-Mitä luulet funktion kasvavuuden ja vähenevyyden tarkoittavan? Kuinka se näkyy kuvaajassa? Kuinka se näkyy funktion lausekkeessa?

-Milloin ko. funktiot saavat positiivisia arvoja? Entä negatiivisia? Entä arvon nolla? Voisiko tämän selvittää jotenkin myös laskemalla?

-Mitä kaikkia arvoja ko. funktiot voivat saada? Millä muuttujan arvoilla?

-Jäätelöt maksavat 1,50€ / kpl. Kirjoita tämä funktiona ja piirrä kuvaaja. Mitä havaitset verrattuna edelliseen tehtävään?

-Välikoonnit ja loppukoonti.</td><td>-Graafinen tulkinta

-Merkinta f(x) = y

-Kasvavuus ja vähenevyys

-Funktion erimerkkiset arvot, nollakohdat

-Määrittelyjoukko

-Arvojoukko

-Verrannollisuus

-Lukualuekertausta</td></tr>
</table>

Kokonaisuus 3. GeoGebra. -Pareittain -Tutki, kuinka muuttujan kerroin, muuttujan eksponentti ja funktion lausekkeen vakiotermi vaikuttavat funktion kuvaajaan. Ota ruudunkaappauksia tilanteista, joissa teet havaintoja. Kirjoita havaintojasi omin sanoin. -Muodosta lauseke ja kuvaaja kolmelle eri funktiolle, jotka leikkaavat y-akselin pisteessä (0,3). -Muodosta lauseke ja kuvaaja kolmelle eri funktiolle, joilla on nollakohta pisteessä (4,0). -Muodosta lauseke ja kuvaaja kolmelle eri funktiolle, joiden kuvaajat leikkaavat pisteessä (5,1) -Koonnit tausta-ajatusten mukaisesti.	-Funktion lausekkeen analysointi -Syvällisempi ymmärrys -Graafisen ja algebrallisen esityksen yhdistäminen
Kokonaisuus 4. Algebralliset taidot -Pareittain -Ratkaistaan erilaisten ja erityyppisten funkioiden nollakohtia algebrallisesti. -Funktion merkki algebrallisesti. -Millä muuttujan arvolla funktio saa tietyn arvon? Algebrallisesti. Graafinen esitys? -Onko piste kuvaajalla vs. toteuttaako pisteen koordinaatit kuvaajan yhtälön? -Millä muuttujan arvolla funktiot saavat saman arvon? Algebrallisesti. Graafinen esitys? -Koonnit tausta-ajatusten mukaisesti	-Edelleen graafisen ja algebrallisen esityksen yhdistämistä -Paino algebrallisten taitojen kehittämisessä

Kokonaisuus 5. Syventävää tietoa -Kääntäen verrannollisuus -Tutkitaan tilavuus- ja pinta-alafunktioita graafisesti ja algebrallisesti. -Kuinka säteen n-kertaistaminen vaikuttaa pinta-alaan tai tilavuuteen? -Funktion suurin ja pienin arvo -Arjessa ja työssä vastaan tulevia, ”oikeita” funktioita. Kuvataan eri asioita funktioilla.	-Määrittelyjoukko -Opetellaan laajentamaan ajattelua laatikon ulkopuolelle. -Opitun siirtovaikutus

4. Matematiikan opettajien oppimis- ja opettamisuskomusten merkitys tutkivan oppimisen soveltamisessa

1. Mitä tutkiva oppiminen mielestäsi on?

"Yhdessä oppimista. Opitun asian läpi käymistä ryhmissä. Soveltuu, jos ryhmä on pieni."

...

"Oppiminen perustuu oppijan omaan aktiivisuuteen. Opettaja ohjaa ongelman asettelussa ja ratkaisussa, tiedon etsinnässä ja jäsentämisessä."

...

"Opettamista käytännönläheisesti, apuvälineiden avulla. Tiedon oppiminen esim. projektitöiden avulla."

...

"Opitaan kysymysten kautta. Oppilas itse löytää oikeat kysymykset. Osaa jäsennellä ja löytää olennaisen."

2. Oletko soveltanut tutkivaa oppimista matematiikan opetukseen? Kuinka?

"En ainakaan tietoisesti."

...

"Yrittänyt. Enimmäkseen ohjaamalla oppilaita tekemään havaintoja, hahmottamaan ongelmaa ja keksimään ratkaisun ennen asian varsinaista opettamista.. Löytämään siis säännönmukaisuuksia jne."

...

"Piin löytäminen tutkimalla erisäteisiä ympyröitä, tutkielma tilastotieteessä - kerätään aineisto, tehdään kuvaajat/diagrammit, lasketaan keskiarvoja, tyyppiarvoja, mediaania."

...

"En varsinaisesti uuden oppimiseen. Jonkinlaisia ryhmätöitä ja ongelmanratkaisutehtäviä, joissa ei ole yhtä oikeaa vastausta. Kolmiulotteisten kappaleiden tutkiminen/luokittelu/ryhmiin jako. Pythagoraan lauseen opettelu."

3. Onko tutkivaa oppimista mielestäsi helppo/vaikea soveltaa matematiikan opetukseen? Miksi?

"Jos vähän oppilaita, niin voisi käyttää jonkun uuden asian opetuksessa. Oppilaat voisi pyrkiä opettamaan ottamaan itsenäisesti selvää -> erilaiset projektityöt, jotka koottaisiin kokonaisuuksiksi."

...

"Sekä että. Vaatii aikaa, valmistelua, suunnittelua, joten useimmiten päädyn tavalliseen opetukseen. Toisaalta ongelman asettelua voi tehdä tutkivan oppimisen hengessä. Oppilaita voi myös rohkaista tutkivaan oppimiseen, kun he pyytävät apua. Eniten sovellan geometriassa, koska käytössä on konkreettinen lähtömateriaali, jonka avulla ongelmat on helppo hahmottaa."

...

"Aika vaikea. Ajan puute -> ei jaksa alkaa suunnitella ekstratöitä, koska pitäisi sitten karsia muusta oppimateriaalista. Oppilaita on vaikea saada innostumaan vaihtoehtoisista työtavoista."

...

"Vaikeaa. Uuden asian oppiminen ja oivaltaminen haasteellista. Oppilaat tarvitsevat ohjausta, opettajan johdattelevia kysymyksiä. Aika rajallista. Silloin, kun jotain tutkivan oppimisen muotoa käyttää, oppilaat selvästi motivoituneempia. Pitäisi varmaan kehitellä enemmän aiheita."

Peruskoulun ja lukionkin matematiikan opetus usein on Kirsti Longan mainitsemaa OPS-hölkkää, johtuen laajoista oppisisällöistä. On hyvin vaikea lähteä rakentamaan laajaa, suhteellisesti enemmän aikaa vievää, useamman kuukauden projektia, kun oppitunnit meinaavat loppua kesken muutenkin. Lisäksi tutkivan oppimisen ajatus keskittymisestä "aihepiirin kannalta olennaisiin" käsitteisiin laajojen asiakokonaisuuksien kustannuksella tuntuu todella vaikealta. Ei siksi, etteikö tärkeitä osakokonaisuuksia löytyisi, vaan koska tuntuu mahdottomalta karsia mitään pois. Usein tutkivan oppimisen varjopuoleksi myös tunnustetaan matematiikan osalta proseduraalisen sujuvuuden kärsiminen - mekaaninen laskutaito ja algebralliset taidot kärsivät harjoittelun puutteesta - tätä syvempi ymmärrys ei korvaa. (Vaikkakin, aidosti asian ymmärtäneen oppilaan voi ajatella kykenevän tarvittaessa johtamaan tarpeelliset laskukaavat.) Edellä mainittua vajetta voi toki paikata tehtävien tekemisellä kotona, mutta oppilaidenkin kapasiteetilla ja vapaa-ajalla on rajansa. -Myös tutkivan oppimisen projekteja pitäisi jatkaa vapaa-ajalla ja verkkoympäristöissä.

Kuitenkin, *tutkivalla otteella* matematiikan opiskelussa on paikkansa. Oppimispsykologian tutkimukset ovat vahvistaneet Andersonin (1980) aikaisemman hypoteesin siitä, että faktojen ja toimintojen oppiminen tapahtuu eri mekanismein (Bereiter & Scardamalia, 1996). Tutkivan oppimisen menetelmät tarjoavat nimenomaan keinon opetella toimintoja. Lisäksi aktiivinen "oikeiden" ongelmien ratkaisu yhdistää luokkahuoneen teorian ja elävän elämän ja tehostaa siis siirtovaikutusta. Sitä vastoin pelkkä sääntöjen ja algoritmien opettelu saattaa jopa estää ongelmanratkaisutaitojen ja luovuuden kehitystä (Bergström, 1985). Oppilaiden pitääkin siis saada tutkia ja keksiä itse. On pitkällä tähtäimellä erittäin hyödyllistä, joskin kärsivällisyyttä vaativaa antaa tieto oppilaille vähemmän pureskeltuna, behavioristisia perinteitä uhmaten. Usein jo pelkästään avoin keskustelukulttuuri edistää oppimista, oppilaiden ja opiskelijoiden uskaltaessa kysyä "tyhmiäkin" kysymyksiä sekä opiskelijatovereiden neuvoessa toisiaan. Yhteinen ongelmanratkaisu myös opettaa oppilaita jäsentämään asioita paremmin, ilmaisemaan itseään matematiikan kielellä, reflektoimaan ajatuksiaan ja tämän myötä kehittämään metakognitiivisia taitojaan. Useimmat opettajat ovat perehtyneet edellä mainittuihin ajatuksiin ja onkin mielenkiintoista, miksi siitä huolimatta tutkivaa matematiikkaa harjoitetaan koulussa huomattavan vähän.

Edellisen inspiroimana, toteutimme seuraavan tutkimuksen Christian Seppäsen ja Katja Huhkan kanssa Opettaja työnsä tutkijana -seminaarissa, Laura Tuohilammen ohjauksessa.

4.1. Johdanto

Konstruktivistinen oppimiskäsitys korostaa oppijan itsensä aktiivista roolia uuden tiedon oppimisessa. Sitä voidaan pitää nykyään yleisesti vallitsevana oppimisteoriana, jonka perustalle – ainakin periaatteessa – rakentuu niin matematiikan kuin muidenkin aineiden kouluopetus. Konstruktivistista oppimiskäsitystä voidaan pitää myös laajempana viitekehyksenä, jonka alle mahtuu erilaisia oppimisnäkemyksiä tai -malleja. Yksi tällainen konstruktivismin pohjalta luotu oppimisnäkemys on ns. "tutkivan oppimisen malli" (Hakkarainen, Lonka & Lipponen, 2008).

Tutkivassa oppimisessa oppilaat tyypillisesti tutkivat jotakin ilmiötä, johon heille ei ole annettu valmista ratkaisumenetelmää. Uuden asian oppiminen tapahtuu oppilasryhmissä etsimällä ja kokeilemalla erilaisia ratkaisumahdollisuuksia annettuun ongelmaan. Opettajan tehtävänä on ohjata työskentelyä, ei antaa suoraan "oikeita" vastauksia. Tutkivan oppimisen on todettu kehittävän luovaa ongelmanratkaisutaitoa sekä loogista ajattelukykyä. Tämän mallin voidaankin katsoa vastaavan tulevaisuuden työelämän asettamiin vaatimuksiin: Ihmiset joutuvat yhä useammin ratkaisemaan ongelmia, joihin ei ole olemassa yhtä selkeää vastausta ja jotka vaativat suuren tietomäärän sisäistämistä sekä syvällistä ymmärtämistä. Perinteisen (behavioristisen) kouluopetuksen on ollut vaikea vastata näihin haasteisiin, erityisesti luovan ongelmanratkaisun osalta. (Hakkarainen, Lonka & Lipponen, 2008.)

Vaikka suomalaisten koululaisten oppimistulokset ovatkin kansainvälisesti huipputasoa, oppilaiden ongelmanratkaisutaidossa on havaittu puutteita (Niemi, 2010). Tämän vuoksi on perusteltua kysyä, toteuttavatko opettajat työssään ongelmanratkaisua kehittävää tutkivan oppimisen mallia, vai onko opetus vallitsevasta oppimisnäkemyksestä huolimatta edelleen perinteistä tiedon siirtämistä. Jos tutkivaa oppimista ei toteuteta riittävästi, on mielenkiintoista pohtia syitä mistä tämä johtuu.

On todettu, että ihmisen uskomukset ja käsitykset vaikuttavat siihen miten tämä toimii; näin ollen opettajan uskomuksilla ja käsityksillä matematiikan opettamisesta ja oppimisesta on epäilemättä vaikutus siihen, miten hän käytännön tilanteessa opettaa (Pajares, 1992; Pehkonen, 1994). Tässä työssä haluamme selvittää millaisia uskomuksia ja käsityksiä matematiikan opettajilla on matematiikan opettamisesta ja oppimisesta erityisesti tutkivan oppimisen näkökulmasta. Lisäksi haluamme tutkia sitä, kuinka paljon he käyttävät matematiikan opettamisessa tutkivan oppimisen mallia. Tutkimuksen tarkoitus on edelleen selvittää, millainen yhteys käsityksillä ja uskomuksilla on siihen, miten opettajat opettavat. Periaatteessa olisi oletettua, että mikäli opettajan käsitykset hyvästä matematiikan opettamisesta ja oppimisesta vastaavat tutkivan oppimisen mallia, opettaja myös tuntee ja soveltaa tutkivan oppimisen menetelmiä tehokkaasti.

4.2. Teoreettinen tausta

Vaikka uskomukset ja käsitykset opettamisesta vaikuttavatkin merkittävästi siihen, miten ihminen toimii opettaja, vaikutus ei ole suoraviivasta, vaan ihmisen toiminta on monen asian summa. Tutkimuksissa on havaittu, että opettajien uskomusten ja toiminnan välillä on usein ristiriitoja (Chen, 2008; Oksanen, Tuohilampi & Hannula, tulossa; Thompson 1992; Kagan, 1992). Käsitys siitä, millaista on hyvä opettaminen, ei vielä takaa, että opettaja todellisuudessa toimii näin. Syitä tähän voi olla useita (tarkemmin, ks. Chen 2008). Tässä työssä selvitämme esiintyykö tutkivan oppimisen mallin tapauksessa ristiriitoja uskomusten/käsitysten sekä toiminnan välillä. Ennen tarkempaa tutkimuskysymysten asettelua, on syytä selventää ja määritellä joitakin tutkimuksessa käytettyjä käsitteitä.

4.3. Tutkiva oppiminen matematiikassa

Tutkivan oppimisen malli on konstruktivistisen oppimisteorian pohjalta syntynyt oppimismenetelmä, jossa oppijat ovat aktiivisia tiedon tuottajia. Mallin mukaan oppijoiden on itse tutkimalla etsittävä ratkaisua ongelmaan, johon heidän senhetkiset tietonsa ja taitonsa eivät suoraan riitä. Opettajan tehtävänä on ohjata työskentelyä, mutta ei antaa suoria vastauksia.

Tutkivaa oppimista ovat kehittäneet erityisesti Hakkarainen, Lonka & Lipponen (1999; 2008) ja se on saanut ajan kuluessa erilaisia vivahteita. Alkuperäisessä mallissa oli olennaista, että opettaja ei toiminut tutkimuskysymysten asettajana, vaan opiskelijat itse asettivat myös tutkimuskysymyksensä. Tuoreimmassa teoksessaan Hakkarainen, Lonka ja Lipponen (2008) eivät pidä tutkivaa oppimista enää ensisijaisesti ”mallina”, vaan laajemmin lähestymistapa, jossa tärkeää on tutkiva asenne maailmaa ja tietoa kohtaan. Tarkkaa ja yksiselitteistä määritelmää tutkivalle oppimiselle on siten hankala muodostaa, mutta yhteistä tutkivaa oppimista hyödyntäville menetelmille on edellä kuvattu tutkiva asenne. Tässä työssä määrittelemme tutkivan oppimisen seuraavasti:

> Tutkiva oppiminen on lähestymistapa, jossa ensisijaista on tutkiva asenne opittavaa asiaa kohtaan. Tutkiva asenne ilmenee siten, että opiskelijat itse tutkimalla ja kokeilemalla etsivät ratkaisua ongelmaan, jonka selvittämiseksi heillä ei vielä ole kaikkia tarvittavia tietoja. Tutkivassa oppimisessa opettaja ohjaa työskentelyä, mutta ei anna suoria vastauksia.

Tämän määritelmän mukaisesti emme pidä tutkivassa oppimisessa välttämättömänä alkuperäisen mallin näkemystä, että opiskelijoiden olisi joka tilanteessa itse määriteltävä myös tutkimuskysymyksensä.

Matematiikan osalta kirjallisuudessa esiintyy useita nimityksiä, joiden voidaan katsoa sopivan edellä esitettyyn yleiseen tutkivan oppimisen määritelmään. Tutkivan oppimisen (Hakkarainen, Lonka & Lipponen, 2008) lisäksi tällaisia nimityksiä ovat *ongelmalähtöinen oppimisen malli* (Boud & Feletti, 1998), *avoin lähestymistapa ja tutkimustehtävien käyttö* (Pehkonen, 2003; 2012), *luova ongelmanratkaisu* (Pehkonen,

2012) ja *elämyksellinen matematiikka*[1] (Portaankorva-Koivisto, 2010). Koska kaikki edellä mainitut lähestymistavat voidaan lukea tutkivan oppimisen alle matematiikan osalta, käytämme tässä tutkielmassa niille yleisnimitystä *tutkiva matematiikka*. Sen sijaan tutkivaa matematiikkaa tässä yhteydessä ei ole satunnainen käytännön esimerkkien käyttö tai kyselevä opetustyyli ainoana käytettynä tutkivan oppimisen elementtinä.

Ongelmanratkaisu

Tehtävän sanotaan olevan ongelma, jos sen ratkaiseminen vaatii, että ratkaisijan on yhdisteltävä ennestään tuttua tietoa (hänelle) uudella tavalla. Jos oppija tunnistaa heti tehtävän ratkaisemiseksi tarvittavat toimet, niin kyseinen tehtävä on hänelle rutiinitehtävä. Käsite ”ongelma” on siten suhteellinen – se on aina sidottu aikaan ja henkilöön. (Haapasalo, 1994; Pehkonen, 2003.)

Avoin tehtävä

Tehtävän sanotaan olevan avoin, jos sen alku- tai lopputilanne ei ole tarkasti määritetty. Avoimiin tehtäviin kuuluvat mm. arkielämän tehtävät, ongelman asettaminen, ongelmakentät (tai ongelmajonot), ongelmat joissa ei ole kysymystä, projektityöt ja tutkimustehtävät. (Pehkonen, 1995; 1997.)

4.4. Opettajien uskomukset

Uskomukset (Beliefs) vaikuttavat opettajan päätöksentekoon ja ovat siten yhteydessä myös tämän toimintaan opetustilanteessa (Calderhead, 1996; Speer 2008). Termille ”uskomus” ei kuitenkaan ole olemassa yleisesti hyväksyttyä ja yksiselitteistä määritelmää, vaan eri tutkijat käyttävät osittain erilaisia määritelmiä. McLeodin & McLeodin (2002) mukaan erilaisia määritelmiä voidaan käyttää eri konteksteissa riippuen kulloisesta käyttötarpeesta. Yhteistä määritelmille yleensä on, että uskomukset

1 Tarkemmin määriteltynä: ”elämyksellisen matematiikan opetuksen taso 3”.

sisältävät kognitiivisen ja affektiivisen komponentin. Näiden pohjalta uskomukset voidaan karkeasti jakaa ”tiedollisiin” ja ”tunteisiin liittyviin” uskomuksiin. (Op’t Eynde, de Corte & Verschaffel, 2002.) Kognitiivisen ja affektiivisen komponentin lisäksi uskomuksiin liitetään usein varmuusaste, ts. kunka varmana uskomuksen subjekti pitää omaa uskomustaan. Tämän työn kannalta on riittävää määritellä uskomukset Pehkosta (1994) mukaillen seuraavasti:

> Uskomus on yksilön kognitiivinen tai affektiivinen ajatusrakennelma jostakin objektista, jota hän pitää totena ja jolle ei objektiivisissa tarkasteluissa aina löydy pätevää perustelua.

Edelleen, uskomukset voivat olla joko tiedostettuja tai tiedostamattomia. Tiedostetulle uskomukselle käytämme tässä työssä nimitystä *käsitys* (Conception) (samoin Pehkonen, 1994). Koska käsitykset muodostavat vain osan uskomuksista, jäljelle jää uskomuksia, jotka eivät ole tietoisia. Näistä ei-tietoisista uskomuksista käytetään englanninkielisessä kirjallisuudessa nimitystä Subconceptions (Oksanen, Tuohilampi & Hannula, tulossa). Koska tietääksemme suomalaisessa tutkimuksessa ei ole vakiintunutta termiä tiedostamattomille uskomuksille, käytämme sille tässä työssä nimitystä *piilouskomus*.

Op’t Eynde, de Corte & Verschaffel (2002) ovat tutkineet oppilaiden uskomuksia käsitteleviä tutkimuksia vuosilta 1984–2000. Näiden tutkimusten pohjalta he päätyvät esittämään luokittelun sen perusteella mihin uskomukset kohdistuvat. Jaottelun mukaan oppilailla voi olla uskomuksia

1) matematiikasta itsestään (esim. miten matematiikka opetetaan tai opitaan),
2) opilaista itsestään (esim. olen hyvä matematiikassa),
3) sosiaalisesta kontekstista (esim. miten luokassa tulee käyttäytyä tai mikä on sallittua matematiikan tunnilla).

Tässä työssä on tarkoituksena tutkia edellä esitetyn luokittelun kohdan 1) uskomuksia opettajien osalta. Erityisesti keskitymme opettajien uskomuksiin matematiikan opettamisesta ja oppimisesta.

4.5. Tutkimustehtävä ja tutkimuskysymykset

Tämän tutkimuksen tarkoituksena on selvittää matematiikan opettajien matematiikan oppimiseen ja opettamisen liittyvien uskomusten ja tutkivan oppimisen välistä yhteyttä. Tutkimuskysymykset ovat:

1) Millä tavalla matematiikan opettajat ymmärtävät käsitteen ”tutkiva oppiminen”?
2) Kuinka paljon ja millä tavoin matematiikan opettajat käyttävät työssään tutkivan oppimisen menetelmiä?
3) Millainen yhteys matematiikan opettajien matematiikan oppimiseen ja opettamiseen liittyvillä uskomuksilla tutkivan oppimisen menetelmien käyttämiseen opetuksessa?

4.6. Tutkimuksen toteutus

Tutkimuksen välineenä käytettiin kvantitatiivista tutkimuslomaketta. Lomakkeen pohjana oli NorBa-tutkimuksessa (Nordic-Baltic Comparative Research in Mathematics Education) käytetty lomake, jota on jo testattu ja kehitetty eteenpäin pilottitutkimuksen avulla (Oksanen, Tuohilampi & Hannula, tulossa).

NorBa tutkimuslomake on jaettu kahdeksaan osaan, jotka ovat: A. Taustakysymykset; B. Yleinen tyytyväisyytesi opettajan työhön; C. Näkemyksesi kahdesta opetuksen lähestymistasta [konstruktivistinen/perinteinen]; D. Näkemyksesi hyvästä (tehokkaasta) opetuksesta; E. Näkemyksesi hyvästä matematiikan opettamisesta ja oppimisesta; F. Kuinka käytät oppikirjaa; G. Tavallinen oppituntisi; H. Kirjoita opettajaa kuvaava metafora. Lukuun ottamatta osioita A. ja H., lomake koostuu väittämistä joihin pitää vastata 4- tai 5-portaisella Likertin asteikolla.

Oman tutkimuslomakkeemme toteutimme e-lomakemuotoisena (ks. liite 1). Käytimme siinä hyväksemme NorBa-lomakkeen osioita A., C., E. ja G., mutta muokkasimme niitä paremmin nimenomaan tutkivaa matematiikkaa mittaaviksi. Lisäksi lisäsimme vapaamuotoisilla lauseilla vastattavan osion (B.), jossa kysyttiin vastaajan käsitystä tutkivasta oppimisesta.

4.7. Aineiston hankinta

Pyyntö vastata tutkimuslomakkeeseen lähetettiin ensiksi Matemaattisten aineiden opettajien liiton (MAOL) viikottaisessa kerhopostissa (vko 11).[2] MAOLin jäseniä on arviolta 4400,[3] mutta meillä ei ole tiedossa, kuinka moni aktiivisesti lukee kerhopostin. Vastauksia tämän kyselyn avulla saimme viikon 12 loppuun mennessä varsin vaatimattomattasti, yhteensä 10 kappaletta. Vähäisen vastausmäärän vuoksi päätimme lähettää tutkimuspyynnön myös suoraan sähköpostilla tietyille matematiikan opettajille ryväsotantana. Valitsimme sattumanvaraisesti seuraavat koulut: Ylöjärven ja Savonlinnan yläkoulut ja lukiot sekä Viherlaakson koulun ja Helsingin normaalikoulun pääkaupunkiseudulta. Lähetimme näiden koulujen kaikille matematiikan opettajille (yhteensä 73) pyynnön vastata kyselyyn. Vastauksia saimme maaliskuun loppuun mennessä 11 kappaletta.

2 Viikon 11 MAOLin kerhoposti on luettavissa osoitteessa http://uutiskirje.maol.fi/index.php?id=1711.

3 Jäsenmäärä vuonna 2010.

4.8. Aineiston analysointi

Tutkimuslomakkeen kysymykset luokiteltiin siten, vastasivatko ne oppimisnäkemystä (perinteinen vs. tutkiva) vai oppituntien työskentelytapoja (esim. ryhmätyöt tai tietotekniikan käyttö). Skaalasimme vastaukset siten, että oppimisnäkemysten osalta pistemäärä 2 tarkoittaa tutkivaa lähestymistapaa ja –2 perinteistä, behavioristista lähestymistapaa. Työskentelytapojen kohdalla vastaus 2 tarkoittaa puolestaan aktiivista käyttöä ja –2 sitä, ettei kyseistä työskentelytapaa käytetä lainkaan.

Osion B. avoimia kysymyksiä tutkittiin kvalitatiivisesti etsien sieltä mahdollisia erilaisia teemoja. Osioita C., D. ja E. puolestaan tarkasteltiin tilastollisia analysointimenetelmiä apuna käyttäen.

4.9. Tutkimustulokset ja niiden tulkintaa

Seuraavassa käymme lyhyesti läpi keskeiset tutkimustulokset. Aloitamme siitä, miten opettajat ymmärtävät käsitteen ”tutkiva oppiminen”. Tämän jälkeen tarkastelemme sitä, kuinka perinteistä tai tutkivaa opetus on käytännössä ja millainen yhteys käytännön luokkahuoneessa tapahtuvalla toiminnalla on opettajien uskomuksiin. Lopuksi selvitämme vielä tarkemmin, millaisia tutkivan matematiikan piirteitä opetuksessa esiintyy tai ei esiinny.

4.10. Matematiikan opettajien käsitys tutkivasta oppimisesta

Yksi tutkimustehtävämme oli, millä tavalla matematiikan opettajat ymmärtävät käsitteen ”tutkiva oppiminen”. Tätä mitattiin avoimilla kysymyksillä tutkimuslomakkeen osiossa B. Tässä kohden tutkimusaineisto näyttää varsin homogeeniselta ja kaikki vastaajat ovat selvästi ymmärtäneet tutkivan oppimisen hyvin yhdenmukaisesti määritelmämme kanssa (ks. määritelmä edellä).

Lähes kaikissa vastauksissa (18 kappaletta) esiintyi tutkivan oppimisen piirre, jossa opiskelijat ovat itse aktiivisia tiedon tuottajia, esim.

> Oppilas saa selvittää itse pienillä kokeilla luonnonlain tai laskusäännön. (M8.)[4]
>
> – – oppilaat kysyvät – – (M1.)
>
> – – oppilaiden pyrkimyksenä on itse oivaltaa asian ydin – – (R3.)
>
> Oppija toimii ”tutkijana”. (R9.)

Muutamassa vastauksessa tuli myös esille se, että tutkivassa oppimisessa opettajan tehtävänä on ohjata työskentelyä (6 vastausta), eikä antaa suoria vastauksia (5 vastausta). Sen sijaan vain kolmessa vastauksessa kävi eksplisiittisesti ilmi, että opeteltavan asian selvittämiseksi ei ole vielä annettu kaikkia tarvittavia tietoja. Toisaalta, avointen tehtävien käyttöä pidettiin oleellisena viidessä vastauksessa tutkivasta oppimisesta. Määritelmässämme tutkivasta matematiikasta ei ole erityisesti mainittu avointen tehtävien käyttöä, mutta tämän voidaan ajatella olevan eräs tutkivan matematiikan osa-alue. Lisäksi vastauksissa kerrottiin tutkivaan oppimiseen liittyvän usein tiedon rakentaminen sosiaalisessa vuorovaikutuksessa (3 vastausta).

4.11. Uskomusten ja käytännön oppituntien välinen yhteys

Edelleen tutkimuskysymyksenä oli, millainen yhteys matematiikan opettajien uskomuksilla on tutkivan matematiikan käyttämiseen opetuksessa. Opettajien uskomuksia kartoitimme tutkimuslomakkeen osioissa C. ja D. sekä käytännön toimintaa[5] osiossa E.

---

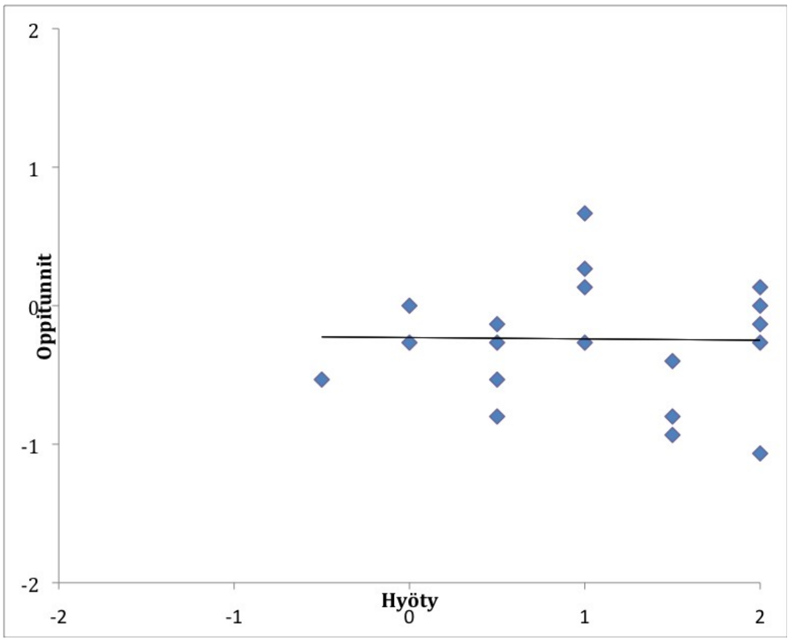
[4] Vastaajat on nimetty koodeilla, jossa ensimmäinen kirjain kertoo, onko vastaaja vastannut MAOLin viikkopostin perusteella (M) vai sähköpostilla toteutetussa ryväsotannassa (R). Perässä oleva numero on järjestysluku.

[5] Tarkemmin: opettajien antamaa kuvaa omasta käytännön toiminnastaan, ks. luku ”Tutkimuksen luotettavuus”.

Tutkimuslomakkeen osion C. vastausten perusteella opettajat arvioivat pitävänsä hieman enemmän tutkivasta oppimisen tavasta (ka = 0,9; moodi = 1), mutta vastaukset vaihtelivat (σ = 1,0). Sen sijaan opettajat arvelivat, etteivät oppilaat olisi yhtä innostuneita tutkivasta oppimisesta (ka = 0,0; moodi = –1; σ = 1,0). Matematiikan oppimisen kannalta opettajat olivat pääsääntöisesti sitä mieltä, että tutkivan oppimisen malli antaa parempia valmiuksia ratkoa matemaattisia tehtäviä (ka = 0,7; moodi = 1; σ = 1,1). Yhtä vastausta lukuunottamatta kaikki kyselyyn vastanneet olivat sitä mieltä, että tutkivan matematiikan malli antaa parempia valmiuksia ratkoa arkielämän ongelmia (ka = 1,5; moodi = 2; σ = 0,6).

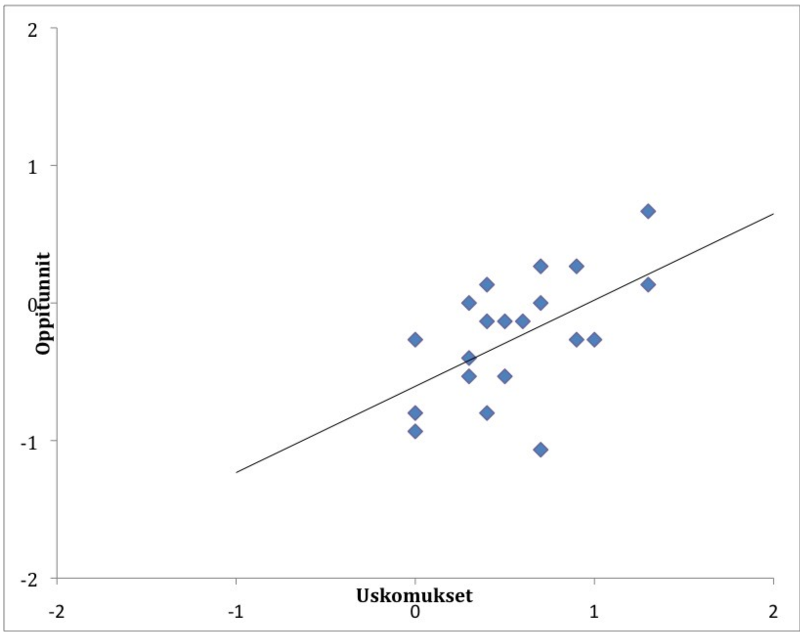
Vaikka opettajat arvioivatkin tutkivan matematiikan olevan oppimisen kannalta selvästi hyödyllisempää, tämä ei näy käytännön opetustilanteissa.Yleisesti ottaen opettajat käyttävät tutkivan oppimisen piirteitä varsin vähän omassa opetuksessaan. Vastauskohdan ”Tyypillinen oppituntisi” vastauksien keskiarvo oli –0,2 (σ = 0,4), mikä tarkoittaa että oppitunnit todellisuudessa olivat hieman lähempänä perinteistä opetusta kuin tutkivaa matematiikkaa. Sillä, kuinka *hyödyllisenä* opettaja piti tutkivan oppimisen mallia, ei ollut vaikutusta oppituntien toimintaan (r=0,02; yksisuuntaisen testi p-arvo[6] = 0,47). Asia on havainnollistettu kuviossa 1, missä vaaka-akseli kuvaa vastaajan käsitystä tutkivan matematiikan hyödyllisyydestä sekä matemaattisten ongelmien että arkielämän taitojen kannalta ja pystyakseli oppituntien luonnetta.

6 P-arvo kuvaa korrelaation merkitsevyyttä. Se tarkoittaa, kuinka todennäköistä on saada vastaava tai vielä suurempi korrelaatiokertoimen arvo sattumalta, ilman että riippuvuutta oikeasti esiintyy perusjoukossa. Yleisesti ottaen arvoja p < 0,05 pidetään riittävänä näyttönä todellisesta korrelaatiosta. Tarkemmin ks. Metsämuuronen 2009, erit. s. 397–398.



Kuvio 1. Oppituntien luonne sen funktiona, kuinka hyödyllisenä opettaja piti tutkivaa matematiikkaa oppilaan oppimisen kannalta. Oppituntien luonne on esitetty asteikolla: –2 = perinteinen opetus … +2 = tutkiva matematiikka. Hyöty on esitetty asteikolla: –2 = ei lainkaan hyötyä … +2 = suuri hyöty.

Tutkimuslomakkeen osiossa D. selvitettiin laajemmin matematiikan opettajien uskomuksia hyvästä matematiikan opettamisesta ja oppimisesta. Vaikka oppituntien toimintaa voisi luonnehtia pikemminkin perinteiseksi, opettajien uskomukset matematiikan opettamisesta ja oppimisesta olivat selvästi enemmän tutkivan matematiikan suuntaisia (ka = 0,6; σ = 0,4). Edelleen aineistosta käy ilmi, että ne, jotka pitivät tutkivaa matematiikkaa parempana, käytännössä toteuttivat sitä myös hieman enemmän (ks. kuvio 2). Uskomuksilla ja toiminnalla havaittiin siten tilastollisesti merkittävä positiivinen korrelaatio (r = 0,56; yksisuuntaisen testin p-arvo 0,004).

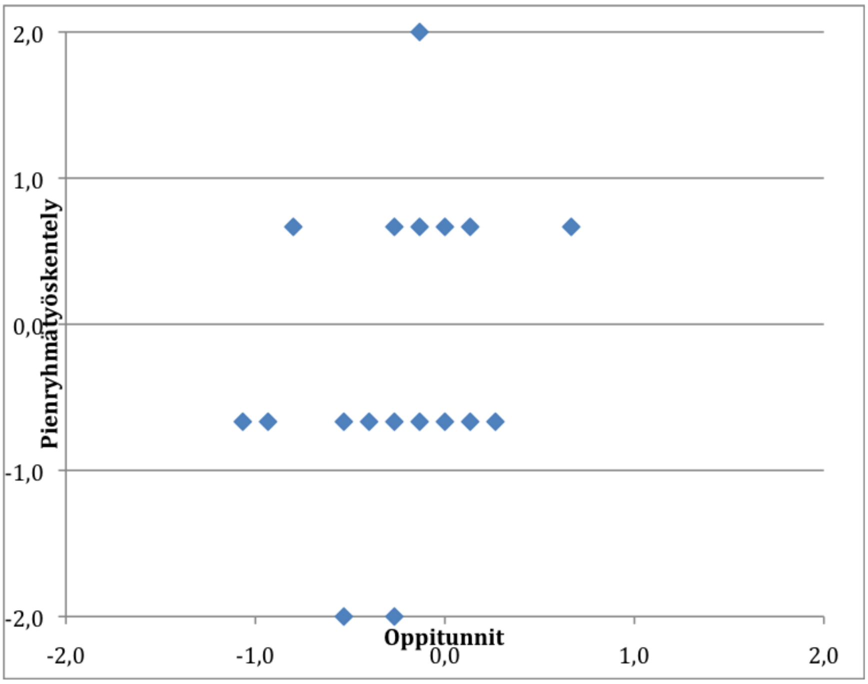


Kuvio 2. Oppituntien luonne opettajien uskomusten funktiona. Oppituntien luonne ja uskomukset on esitetty asteikolla: –2 = perinteinen opetus … +2 = tutkiva matematiikka.

4.12. Tutkiva oppiminen käytännössä

Vaikka kokonaisuutena katsottuna oppitunnit eivät olleet luonteeltaan erityisen tutkivia, voidaan kysyä nousivatko tietyn tyyppiset tutkivan oppimisen piirteet esille toisia enemmän. Tavallista oppituntia kuvatessaan tutkivan matematiikan tavoista selkeimmin oli opetukseen omaksuttu arkielämässä esiintulevien matemaattisten ongelmien ratkaiseminen (ka = 0,8). Seuraavaksi eniten tutkivan oppimisen piirteet näkyivät kaavojen ja sääntöjen ulkoaopettelun vähyytenä (ka = 0,2) sekä sellaisten ongelmien pohtimisena, joihin ei ole itsestäänselvää ratkaisumenetelmää (ka = 0,2). Kauimpana tutkivasta oppimisesta oli seuraavat oppituntien piirteet: kysymysten asettaminen itse aineiston pohjalta (ka = –1,0), työskentely tehtävien parissa, joihin ei ole yksiselitteistä ratkaisua (ka –0,9 ja –0,8) sekä rutiinitehtävien runsas painotus (ka = –0,7).

Edelleen voidaan kysyä millaisia työskentelytapoja käyttivät ne, joiden vastauksissa oli enemmän tutkivan oppimisen piirteitä tai toisaalta käyttivätkö tutkivaa matematiikkaa käytännössä harjoittavat enemmän tietyntyyppisiä menetelmiä kuin muut. Työskentelyä tietotekniikan, graafisten laskinten sekä erilaisten projektien parissa olivat kaikki vastaajat käyttäneet varsin vähäisesti. Paljon tai hyvin paljon opetuksessaan näitä painotti ainoastaan 1–2 vastaaja kussakin. Pienryhmätyöskentelyä sen sijaan harjoitettiin selvästi enemmän, mutta selvää korrelaatiota oppituntien tutkivuudella ja runsaalle pienryhmätyöskentelylle ei löytynyt (ks. kuvio 3).



Kuvio 3. Pienryhmätyöskentelyn määrä oppituntien luonteen funktiona. Oppituntien luonne on esitetty seuraavalla asteikolla: –2 = perinteinen opetus … +2 = tutkiva matematiikka. Pienryhmätyöskentelyn määrä on esitetty asteikolla: –2 = ei lainkaan … +2 = paljon.

4.13. Tutkimuksen luotettavuus

Tutkimuksen otanta (21) muodostui toivottua pienemmäksi. Otoskoko on kiistämättä liian pieni, jotta tutkimuksesta voisi tehdä pitkälle meneviä päätelmiä tai yleistyksiä laajempaan joukkoon. Lisäksi vastausprosentti, varsinkin MAOLin viikkopostin perusteella toteutetussa kyselyssä, muodostui hyvin alhaiseksi. Koska kaikissa vastauksissa tutkiva oppiminen määriteltiin varsin ”oikeaoppisesti”, on syytä olettaa, että vastaajat olivat todennäköisesti keskimääräistä enemmän perillä tutkivan oppimisen menetelmistä ja tavallista enemmän kiinnostuneita aiheesta. Tästä huolimatta on merkittävää, että vastaajien oppitunnit eivät olleet luonteeltaan erityisen tutkivia. On oletettavaa, että laajemmassa joukossa tutkivaa oppimisen piirteitä harjoitetaan vieläkin vähemmän.

Edellisten lisäksi on syytä ottaa huomioon, että emme varsinaisesti ole tarkkailleet luokkatilanteita, vaan olemme pyytäneet opettajia itse kuvailemaan, millainen on heidän tavallinen oppituntinsa. Oletamme, että opettajat ovat olleet tässä asiassa riittävän rehellisiä. Jos tuloksissa on tämän suhteen vinoutumaa, on todennäköisempää, että henkilö arvioi tilanteitaan positiivisemmassa valossa kuin todellisuudessa. Tämä voi tarkoittaa esimerkiksi sitä, että koska lähes kaikki opettajat pitivät tutkivan matematiikan mallia perinteistä opetusta hyödyllisempänä, he arvioivat toimivansa enemmän tämän mukaan kuin todellisuudessa on tilanne. Toisaalta se, että opettajien antama kuva omasta opetuksestaan ei ole erityisen ihanteellinen, viittaa siihen, että opettajat ovat olleet vastauksissaan tältä osin rehellisiä.

5. Pohdintaa ja kritiikkiä

Itse tutkimuksessa selvitettiin matematiikan opettajien käsityksiä tutkivasta oppimisesta, opettajien uskomuksia hyvästä opettamisesta ja oppimisesta sekä sitä miten tutkiva oppiminen näkyy käytännössä. Opettajien vastaukset tutkivasta oppimisesta olivat hyvin yhdenmukaisia kirjallisuuden pohjalta tehdyn määritelmämme kanssa. Tästä voidaan tehdä ainakin se johtopäätös, että tutkivan oppimisen malli oli kaikille vastaajille tuttu.[7] Tämä ei selity sillä, että vastaajat olisivat törmänneet asiaan osana omia aineenopettajan pedagogisia opintoja, koska vastaajien ikä vaihteli 28 ja 56 välillä ja opettajana oloaika 4 ja 35 vuoden välillä. Olisi ollut mielenkiintoista, jos vastauksissa olisi esiintynyt jokin määritelmästämme poikkeava käsitys tutkivasta oppimisesta, mutta näin ei käynyt.

[7] Tulosta voi verrata Vaininonpään ja Joutsenlahden (2010) tutkimukseen 6. luokan matematiikan opettajien uskomuksista. Artikkelin mukaan ”opettajat ovat varsin motivoituneita ja tietoisia matematiikan opetukseen liittyvistä seikoista”.

Vaikka kaikki vastaajat olivat hyvin perillä tutkivasta oppimisesta ja vaikka tutkivaa oppimista pidettiin hyödyllisenä, on merkittävää, että tätä kuitenkin harjoitettiin opetuksessa varsin vähän. Todennäköisesti ne opettajat, jotka eivät tunne tutkivaa oppimista tai eivät pidä sitä hyödyllisenä harjoittavat sitä tuskin ainakaan enempää kuin tässä aineistossa. Vastaavanlainen ristiriita opettajien uskomusten ja toiminnan välillä on havaittu myös Oksasen, Tuohilammen ja Hannulan (tulossa) artikkelissa, jossa tutkittiin opettajien uskomuksia ja opetuskäytäntöjä suhteessa konstruktivistiseen opetuskäsitykseen. Oksanen, Tuohilampi ja Hannula (tulossa) arvelevat myös, että edellä kuvattu ristiriita saattaa vaikuttaa kielteisesti opettajien työtyytyväisyyteen.

Vähäisestä aineistosta huolimatta opettajien uskomuksilla hyvästä matematiikan opettamisesta ja oppimisesta sekä käytännössä tapahtuvalla toiminnalla näyttää kuitenkin olevan kohtalainen korrelaatio ($r = 0{,}56$).[8] Jos siis halutaan uudistaa opetusta enemmän tutkivan oppimisen suuntaan, pitäisi vaikuttaa opettajien uskomuksiin siitä, että tutkivan oppimisen menetelmät ovat toimivia. Käytännössä tämä voitaisiin toteuttaa tuomalla julkisuutta sellaisille kouluille, joissa menestyksekkäästi käytetään tutkivaa oppimista matematiikan opetuksessa. Tutkivan matematiikan menetelmien tuominen osaksi opettajien täydennyskoulusta olisi myös konkreettinen vastaus opettajien itsensä kokemaan tarpeeseen opetusmenetelmien monipuolistamisesta (vrt. Vainionpää & Joutsenlahti, 2010, erit. s. 162).

Myös monia työskentelytapoja, jotka mahdollistaisivat tutkivan matematiikan, hyödynnettiin aineistossa hyvin vähän. Tällaisia työskentelytapoja ovat esimerkiksi projektit, tietotekniikan sekä graafisten laskimien käyttö. On vaikea sanoa, johtuuko näiden työskentelytapojen vähäinen käyttö resurssien puutteesta, osaamattomuudesta tai jostakin muusta, mutta on mahdollista, että näiden työskentelytapojen ja tutkivan oppimisen vähäisyydellä on yhteys. Ei voida kuitenkaan päätellä, että lisäämällä esimerkiksi tietotekniikan osuutta matematiikan opetuksessa, automaattisesti saadaan

8 Oksasen, Tuohilammen ja Hannulan (tulossa) havaitsema vastaava korrelaatio suhteessa konstruktivistiseen opetusnäkemykseen oli huomattavasti heikompi ($r=0{,}24$).

enemmän tutkivaa oppimista.[9] Pikemminkin niin, että kun tutkiva oppiminen lisääntyy, lisääntyy myös tarve käyttää enemmän tietotekniikkaa. Tällöin resurssien puute voi myös olla este.

Tämä tutkimus ei anna lopullista vastausta kysymykseen tutkivan oppimisen mallin käyttämisestä matematiikan opetuksessa. Tarvittaisiin laajempi ja perusteellisempi tutkimus suuremmalla otoskoolla. Olisi kuitenkin mielenkiintoista verrata kuinka paljon sellaisen tutkimuksen tulokset poikkeaisivat tästä pienen aineiston tutkimuksesta.

5.1. Oppimistuloksista

Matematiikan taidot ovat laskussa kaikilla osa-alueilla, erityisesti geometriassa ja funktioissa. Tuloksissa erityisen huolestuttavana voidaan pitää osaamisen tason heikkenemistä luvuissa ja peruslaskutoimituksissa, mikä tarkoittaa koko matemaattisen osaamisen perustan vähittäistä murenemista (Rautopuro, 2012). Samoilla linjoilla on edellisen vuoden raportti: matematiikan osa-alueista eniten osaamisen taso on heikentynyt luvuissa ja laskutoimituksissa (Hirvonen, 2011). Toisaalta kummankin raportin mukaan luvut ja laskutoimitukset hallitaan edelleen osa-alueista parhaiten. Osaamisen tason nopea lasku on siitä huolimatta huolestuttavaa.

Huoli aiheesta ei ole uusi. Jo vuonna 2005 asiasta käytiin keskustelua muun muassa Helsingin Sanomien mielipidepalstalla. Tällöin yläkoulun lehtori Antero Lahti (HS, 28.2.2005) esitti, että huoli matematiikan opetuksesta on vain akateemisen maailman kritiikkiä, huolimatta siitä, että yli 200:sta huolen ilmaisseesta (HS, 17.2.2005) opettajasta noin puolet oli ammattikorkeakoulujen sekä teknillisten yliopistojen opettajia (Kivelä & Tarvainen, HS 10.3.2005). Kivelä ja Tarvainen toteavat tuolloin muun muassa ammattikorkeakoulujen joutuneen karsimaan matemaattisia sisältöjä monissa tekniikan ammattiaineissa huonon osaamisen vuoksi. Kirjoituksessaan Kivelä ja Tarvainen nostavat

[9] Tietotekniikan käyttäminen opetuksessa ei myöskään ole arvo sinänsä, vrt. Luoma-Aho 2010.

esiin myös varsin aiheellisen ja myöhemminkin esiin nousseen kritiikin koskien PISA-tutkimuksen hyviä tuloksia ja sitä, että PISA ei juurikaan mittaa algebrallisia taitoja vaan käytännönläheisiä numeerisia taitoja sekä luetun ymmärtämistä. Algebrassa sen sijaan suomalaiset ovat menestyneet varsin huonosti myös monissa kansainvälisissä vertailututkimuksissa (mm. TIMMS, 1999). Voidaankin nähdä, että hyvät tulokset PISA-tutkimuksissa ovat seurausta ennen kaikkea Suomen peruskoulujen panostuksista nimenomaan PISA-tutkimuksessa korostuviin matematiikan osa-alueisiin. Tämän tiedostamisesta huolimatta, viimeisimpien tulosten valossa, Antero Lahti ei ole selvästikään ollut asenteensa kanssa yksin, eikä tarvittavia korjausliikkeitä ei ole tehty. Matemaattisista ongelmanratkaisutaidoista tai luovuudesta ei ole juurikaan iloa, mikäli ongelmanratkaisu kaatuu algebrallisten taitojen puutteeseen.

Voidaan mielestäni aiheellisesti kysyä, onko erittäin perustavaa laatua olevien matemaattisten taitojen osaamisen heikkeneminen liiallisen ongelmanratkaisun ihannoinnin syytä. Olemmeko unohtaneet Erkki Pehkosenkin mainitseman tasapainoilun rutiinilaskennan sekä luovan ongelmanratkaisun välillä? Matemaattiset perustaidot eivät kehity, mikäli opetuksessa keskitytään liiaksi arkielämän ongelmiin, keksimiseen ja matemaattiseen luovuuteen. Myös suoranaista mekaanisen laskutaidon väheksymistä on havaittavissa. Tossavainen & Sorvali (2004) toteavat muun muassa: ”Laskentopainotteinen matematiikan opetus ei siis enää palvele sen enempää arkipäivän kuin jatko-opintojenkaan tarpeita.”, viitaten nimenomaan tämänhetkiseen koulumatematiikan tilaan.

On varmasti totta, että liika laskento ei ole hyväksi ja syö tilaa nimenomaan luovuudelta ja ongelmanratkaisutaidon kehittymiseltä. Martio (2004) kuitenkin toteaa, että laskemisen opettelu koulussa on jo vähentynyt huomattavasti mm. laskimien ja tietokoneiden käytön seurauksena. Lisäksi, perinteisen laskemisen opettamisen tarkoitus ei ole tehdä meistä virheettömästi laskevia koneita, vaan perehdyttää lukujen suurussuhteisiin ja -luokkiin sekä laskutoimitusten ominaisuuksiin. Liiallinen laskimien ja tietokoneiden käyttö johtaa ei vain numerosokeuteen, vaan myös totaaliseen kyvyttömyyteen analysoida mm.

lausekkeita ja funktioita sekä tietokoneiden syötteistä aiheutuvia virheitä ja epätarkkuuksia tuloksissa. Kuten Martiokin toteaa, laskinten käyttö edellyttää sekä käyttötaitoa että tietoa siitä mihin pyritään. Näistä edellinen edellyttää lausekkeen ymmärtämistä ja jälkimmäinen harjaantunutta silmää. Onkin odotettavissa, että muutaman vuoden kuluttua, ensimmäisten vain symbolista laskinta käyttäneiden valmistuessa lukiosta, korkeakoulujen suunnalta kuullaan turhautumisen purkauksia.

5.2. Opettajankoulutuksesta

Liiallinen arkielämän ongelmien ja keksimisen ihannointi, toisin sanoen liian tutkiva matematiikka on ongelma myös opettajankoulutuksessa. Vuolaaseen puheeseen hieman ”pehmeämmästä” matematiikasta on nuoren matemaatikon alun helppo yhtyä. Idealistiset ajatukset piin löytämisestä yhä uudelleen oppilaiden kanssa tutkien on helppo omaksua. Itsekin myönnän omaksuneeni nämä ihanteet varsin hyvin – siitä tutkielmani aihekin. Mikäli tuleva opettaja nielee kaiken purematta ja tasapaino on opettajankoulutuksessa liikaa tutkivassa matematiikassa, on riski että tulevan opettajan tulevat oppilaat maksavat tästä myöhemmin hinnan. Seuraavassa tarkastelenkin tasapainoiluani yliopistomatematiikan ja didaktiikan oppien välillä, pyrkimyksenäni laadukas opetus.

Edellisen ihannoinnin hengessä opettajankoulutukseen kuuluvaa yliopistomatematiikkaa on helppo kritisoida siitä, että kytkökset koulumatematiikkaan ovat löyhiä ja painopiste on liikaa täysin abstraktien lausekkeiden pyörittelyssä tai arkielämästä kaukana olevien matematiikan osa-alueiden tutkimuksessa. Monissa oppilaidenkin tulevissa ammateissa tämä ns. vaikeampi tai abstraktimpi matematiikka kuitenkin on arkielämää. Peruskoulun ja lukion tulee tarjota valmiudet myös näille linjoille lähtevien oppilaiden jatko-opintoihin. Myös abstraktin ajattelun kehittäminen itsessään on arvokasta. Näiden ja muiden yhteyksien löytäminen vaatii kuitenkin näkemystä, jota opiskelijalla tai vähemmän kokeneella matemaatikolla ei välttämättä ole, mikä puolestaan helposti johtaa kritiikkiin, jonka perusteet eivät kanna. Samaista, yliopistomatematiikan tarjoamaa näkemystä tarvitaan myös tutkivan matematiikan soveltamisessa jokapäiväiseen opetukseen. Avattaessa matematiikan opetus kysymyksille ja tarjottaessa oppilaille tutkimuksen suomia vapauksia tutkivan matematiikan mukaisesti, opettajan onkin erittäin tärkeää nähdä ja ymmärtää, mihin kaikkeen matematiikkaa voidaan soveltaa ja mitä siinä vaaditaan – pystyä perustelemaan myös oppilaille, miksi matematiikkaa opiskellaan. Lisäksi, tutkivan matematiikan seurauksena opettajan aineenhallinnan haasteet kasvavat huomattavasti suuremmiksi. On kovin vaikea ennakoida kaikkia mahdollisia esiin nousevia kysymyksiä, mikä tekee opettajan todellisesta matemaattisesta osaamisesta entistäkin tärkeämpää. Voidaan siis nähdä, että yliopistomatematiikan tarjoama rautainen aineenhallinta, näkemys ja itseluottamus on jopa edellytys menestyksekkäälle tutkivan matematiikan harjoittamiselle opetuksessa.

Edellä mainittujen näkemyksen ja yhteyksien löytämisen vahvistamiseksi yliopisto tarjoaa myös kursseja, joihin Martiokin (2004) viittaa mainitessaan hyvät kokemukset normaalikoulun opettajan pitämältä koulumatematiikan kurssilta. Oletan Martion tässä viittavan Jukka Mäkiseen, jota on seurannut vuonna 2013 Helsingin normaalilyseon Jussi Nieminen ja lukiomatematiikan kurssi – sisältönä nimensä mukaisesti lukiomatematiikan keskeiset asiat. Omat kokemukseni kurssista ovat vuodelta 2013 ja erittäin positiivisia nimenomaan tulevan opettajuuden kannalta. Omien yläkoulu – ja lukiokokemusten jo unohduttua on varsin inspiroivaa vaihtaa ajatuksia keskeisistä aihepiireistä sekä kokeneemman opettajan että vertaistensa kanssa. Erityisesti opiskeltaessa kurssia syventävän opetusharjoittelun ohessa, kurssin vahvuudet näkemyksen tarjoajana ja yhteyksien vahvistajana korostuvat. Tästä esimerkkinä lukiomatematiikan tehtävät, joihin kurssilla etsitään mahdollisimman monia ratkaisutapoja, hyödyntäen yliopistomatematiikan tarjoamaa osaamista. Mainittakoon myös, että tämänkaltainen opiskelu on nimenomaan Pehkosenkin (2012) mainitsemaa avointa lähestymistapaa ja jo itsessään tutkivaa matematiikkaa sekä siihen virikkeitä antavaa.

Kuten Martiokin toteaa, myös opettajankoulutuksen seminaarit tarjoavat opiskelijoille näkemystä koulumatematiikan ja yliopistomatematiikan välisistä yhteyksistä, antaen tulevalle opettajalle työkaluja soveltaa valitsemaansa lähestymistapaa matematiikan opiskeluun ja opettamiseen. Samassa yhteydessä Martio kuitenkin melko kovasanaisesti toteaa didaktikkojen erehdyksen olevan, että he luulevat tietävänsä, mitä kouluissa pitää opettaa, sillä opettamisen ja oppimisen asiantuntevuus ei tähän riitä. Ilmeisesti Martio viittaa tässä matemaattisen taustan tarpeellisuuteen, kritisoiden rivien välissä myös voimakasta painottumista tutkivaan matematiikkaan. Ymmärtääkseni monilla didaktikoilla on kuitenkin myös matemaattinen tausta (esimerkiksi Markku Hannula, Päivi Portaankorva-Koivisto), joten kritiikki saattaa tältä osin olla aiheetonta. Voitaneen myös nähdä, että konstruktivismi on tällä hetkellä vallitseva oppimiskäsitys ja tutkiva matematiikka tämän eräs ilmentymä, minkä puolesta lienee hyväksyttävää, että myös yliopiston opit ovat tämän ajattelun mukaisia. Uskon myös, että tulevalta opettajalta saa ja pitää vaatia omaa ajattelua sekä kykyä tarkastella didaktikkojenkin opetuksia kriittisesti, valiten itselleen ja tuleville oppilailleen kulloinkin sopivan lähestymistavan.

5.3. Matematiikka ongelmanratkaisuna

Olli Martio kritisoi artikkelissaan voimakkaasti nimenomaan ajatusta matematiikasta ongelmanratkaisuna. Hän mainitsee ongelmanratkaisun idean olevan se, että opetuksen tulee perustua käytännön ongelmiin ja tämän johtavan väistämättä matematiikan välineellistämiseen ja kursseihin kuten lyhyen matematiikan talousmatematiikka. Martion mukaan edellä mainittu vie puolestaan huomion matemaattisten käsitteiden täsmälliseltä määrittelyltä ja teorioiden rakentamiselta. Näin ei kuitenkaan tarvitse olla.

Itse näen tutkivan matematiikan olennaisilta osin nimenomaan käsitteiden määrittelynä ja teorioiden rakentamisena. Näen tutkivan matematiikan vastakohtana ylhäältä annettaville säännöille, joita sovelletaan tuntematta näiden taustaa. Tutkivan matematiikan ei tarvitse välttämättä lähteä keinotekoisesta käytännön esimerkistä, vaan tutkimuksen kohteena voi (ja tulee) olla jokin matematiikan keskeinen käsite, joka yhdessä tutkien ja keksien konstruoidaan. Näin toimien Martion mainitsema täsmällisyyden vaatimuskin saavutetaan viimeistään Hähkiöniemen (kts. edellä) mainitsemassa oppitunnin koontivaiheessa. Erinomainen esimerkki keskeisen käsitteen opettelusta tutkivan matematiikan hengessä löytyy mm. Joakim Sundqvistin Pro gradu -tutkielmasta ”Derivaatan oppimiseen syvyyttä tutkivalla oppimisella” (2012).

5.4. Koontia

Matematiikan heikkenevät oppimistulokset antavat syytä pohtia, mitä voitaisiin tehdä paremmin. Osasyy oppimistulosten heikkenemiseen saattaa hyvinkin olla vaakakupin kallistuminen liikaa tutkivan matematiikan puolelle. Matematiikan kokonaisvaltaisessa hallinnassa tarvitaan kiistatta myös kovaa laskurutiinia ja algbrallista osaamista. Tältä osin Martion kritiikki osuukin maaliinsa. Martio ei myöskään ole yksin mielipiteensä kanssa, mistä osoituksena liite 2: ehdotus uudeksi opetussuunnitelmaksi. Mikäli matematiikkaa päätetään opiskella edes jossain määrin ongelmanratkaisuna, on luontevaa valita käsiteltäväksi nimenomaan jokin matematiikan oma, aito ongelma, jolloin käsitteellistä osaamista vahvistetaan (kts. edellä). Näen myös mahdollisena integroida matematiikkaan fysiikkaa ja kemiaa, harjoittaen ongelmanratkaisua näissä puitteissa, oppiaineiden tukiessa ja vahvistaessa toisiaan.

Uusien (ja vanhojen) pedagogisten ajatusten soveltaminen vaatii aina myös näkemystä. Muutoin vaarana ovat ylilyönnit. Heikkenevien oppimistulosten pohjalta opetushallitus onkin laatinut kehittämissuosituksia, joista lopuksi nostan esiin tämän tutkielman kannalta mielenkiintoiset (suluissa omia huomioita):

1. Perus- ja prosenttilaskutaitoon tulee kiinnittää koulussa entistä enemmän huomiota, sillä peruslaskutaito on matemaattisen osaamisen perusta, jolle muu matematiikan osaaminen rakentuu. Prosenttikäsitteen ymmärtäminen ja yksinkertaisimpien prosenttilaskujen hallinta ovat nyky-yhteiskunnassa välttämättömiä kansalaisvalmiuksia.
2. Kotitehtävien antaminen ja niiden suorittamisen valvominen on matematiikan opetuksessa tärkeätä, sillä oppiaineen luonne edellyttää rutiinien hallintaa, joka kehittyy harjoittelemalla. (Kova laskurutiini).
3. Opetuksen järjestäjien tulee huolehtia siitä, että kaikki lapset saavat kelpoisen aineenopettajan antamaa matematiikan opetusta. (Näkemyksen ja aineenhallinnan puute on riski).
4. Matematiikkaa opettavien opettajien (sekä aineenopettajien että luokanopettajien) didaktista täydennyskoulutusta tulee lisätä siten, että kaikki opettajat voivat päästä koulutukseen. (Lisää näkemystä. Lisäksi, opettajien täydennyskoulutus on tarpeellista, mutta sen pitäisi suuntautua enemmän aineen hallintaan (Martio, 2001)).

5. Oppimisympäristöjen ajanmukaistamiseen sekä tietotekniikkaa hyödyntävien opetusmenetelmien monipuolistamiseen ja oppimateriaalien innostavuuteen tulee panostaa. (Esimerkiksi GeoGebran käyttö).

6. Lähteet

Boud, D. & Feletti, G. (1998). *The Challenge of Problem-Based Learning.* Kogan Page Limited.

Chen, C. H. (2008). Why Do Teachers not Practice What They Believe regarding Technology Integration. *The Journal of Educational Research 102:1*, 65–75.

Calderhead, J. (1981). Stimulated Recall: A method for research on teaching. *British Journal of Educational Psychology 51*, 211–217.

Fey, J. (1989) Technology and Mathematics Education: A survey of Recent Developments and Important Problems. *Educational Studies in Mathematics.*

Francisco, J., & Maher, C. (2005). Conditions for promoting reasoning in problem solving: Insights from a longitudinal study. *Journal of Mathematical Behavior.*

Haapasalo, L. (1994). Oppiminen, tieto & ongelmanratkaisu. Jyväskylä: Medusa.

Hakkarainen, K. & Lonka, K. & Lipponen, L. (2004). *Tutkiva oppiminen: Järki, tunteet ja kulttuuri oppimisen sytyttäjinä.* Helsinki: WSOY.

Hakkarainen, K. & Lonka, K. & Lipponen, L. (1999). *Tutkiva oppiminen: Älykkään toiminnan rajat ja niiden ylittäminen.* Helsinki: WSOY.

Hiebert, J. & Lefevre, P. (1986). Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: An Introductory Analysis. Teoksessa J. Hiebert (toim.) *Conceptual and procedural knowledge: the case of mathematics.* Hillsdale, NJ: Erlbaum

Hirvonen, K. (2011). *Onko laskutaito laskussa?* Matematiikan oppimistulokset peruskoulun päättövaiheessa 2011. Opetushallitus.

Hähkiöniemi, M. (2010). Kurssien OPEA411 ja OPEA611 luennot lukuvuonna 2010-2011. Julkaisematon.

Hähkiöniemi, M. (2011). *GeoGebra-avusteinen tutkiva matematiikka opetusharjoittelussa.* Jyväskylän yliopisto. Opettajankoulutuslaitos.

Hähkiöniemi, M. & Leppäaho, H. (2010). Matematiikan aineenopettajaksi opiskelevien valmiudet ohjata opiskelijoita GeoGebra-avusteisissa tutkimustehtävissä. Teoksessa M. Asikainen, P.E. Hirvonen, & K. Sormunen (Toim.), *Ajankohtaista matemaattisten* *aineiden opetuksen ja oppimisen tutkimuksessa. Matematiikan ja luonnontieteiden opetuksen tutkimuspäivät Joensuussa 22.-23.10.2009* (s. 59–75). Joensuu: Itä-Suomen yliopisto.

Joutsenlahti, J. (2003). Matemaattinen ajattelu ja kieli, eräs mielenkiintoinen ulottuvuus uudessa opetussuunnitelmassa. Teoksessa A.-L. Aalto & T. Tuomi (toim.) *Projekteja ja prosesseja - opetuksen käytäntöjä matematiikassa ja viestinnässä.* Tampereen yliopisto. Hämeenlinnan normaalikoulun julkaisuja nro 8, 3-12.

Kagan, D. M. (1992). Implications of Research on Teacher Beliefs. *Educational psychologist 27:1*, 65–90.

Kalli, P. (2007). Arviointi ja tutkiva oppiminen.

Kilpatrick, J. & Swafford, J. & Findell, B. (2001). *Adding + it Up: Helping Children Learn Mathematics.* National research council (Etats-Unis). Mathematics learning study committee.

Kwon, O. N., Park, J. S., & Park, J. H. (2006). Cultivating divergent thinking in mathematics through an open-ended approach. *Asia Pacific Educational Review.*

Laitamäki, A. (2009). GeoGebra-ohjelma konstruktivistisen oppimiskäsityksen mukaisen matematiikan opetuksen tukena. Jyväskylän yliopisto. Matematiikan ja tilastotieteen laitos.

Luoma-Aho, E. (2010). Havainnollistamisesta tietokoneen avulla. *Dimensio* 2010:1, 58–59.

Martio, O. (2001). Osataanko matematiikkaa? *Matematiikkalehti Solmu* 2001:3, 28-29.

Martio, O. (2004). Didaktista matematiikkaa? *Tieteessä tapahtuu* 2004:2, 42-45.

McLeod, D. B. & McLeod, S. H. (2002). Synthesis – Beliefs and Mathematics Education: Implications for Learning, Teaching, and Research. Teoksessa G. C. Leder & E. Pehkonen & G. Törner (toim.), *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?* (s. 115–123). Boston: Kluwer Academic Pub- lishers.

Metsämuuronen, J. (2009). *Tutkimuksen tekemisen perusteet ihmistieteissä.* 4. laitos. Helsinki: International Methelp.

Monna, A.F. (1992). *The way of mathematics and mathematicians*. CWI tract 87. Amsterdam.

Niemi, E. K. (2010). Matematiikan oppimistulokset 6. vuosiluokan alussa. Teoksessa E. K. Niemi & J. Metsämuuronen (toim.), *Miten matematiikan taidot kehittyvät? Matematiikan kansalliset oppimistulokset peruskoulun viidennen vuosiluokan jälkeen vuonna 2008* (s. 17–70). Helsinki: Opetushallitus.

Oksanen, S. & Tuohilampi, L. & Hannula, M. (tulossa). Finnish Mathematics Teachers' Beliefs and Practices with Regard to Constructivist Teaching and Learning. Artikkelikäsikirjoitus.

Op't Eynde, P. & de Corte, E. & Verschaffel, L. (2002). Framing Students' Mathematics-Related Beliefs. Teoksessa G. C. Leder & E. Pehkonen & G. Törner (toim.), *Beliefs: A Hidden Variable in Mathematics Education?* (s. 13–37). Boston: Kluwer Academic Publishers.

Pajares, M. F. (1992.) Teachers' Beliefs and Educational Research: Cleaning Up a Messy Construct. *Review of Educational Research, 62:3*, 307–332.

Pehkonen, E. (2012). Luovuus matematiikassa: osa 1. *Dimensio, 2012:3,* 10– 15.

— (2003). Tutkiva matematiikan oppiminen peruskoulussa. *Tieteessä tapahtuu, 2003:6*, 35– 38.

— (1997). Use of problem fields as a method for educational change. Teok- sessa E. Pehkonen (toim.), *Use of Open-Ended Problems in Mathematics Classroom* (s. 73–84). Department of Teacher Education. Research Re- port 176. Helsinki: University of Helsinki.

— (1995). Introduction: Use of Open-Ended Problems. *International Reviews on Mathematical Education 27*(*2*), 55–57.

— (1994). Opettajien matemaattisten uskomusten muuttumisesta. Teoksessa H. Silfverberg & K. Seinelä (toim.), *Ainedidaktiikan teorian ja käytännön kohtaaminen* (s. 59–66). Tampere: Tampereen yliopisto.

Portaankorva-Koivisto, P. (2010). *Elämyksellisyyttä tavoittelemassa: Narratiivinen tutkimus matematiikan opettajaksi kasvusta.* Acta Universitatis Tamperensis 1550. Tampere: Tampere University Press.

Rautopuro, J. (2012). *Hyödyllinen pakkolasku.* Matematiikan oppimistulokset peruskoulun päättövaiheessa 2012. Opetushallitus.

Rice, B. (1992). *Increasing critical thinking skills of the fourth grade student through problem solving activities.* ERIC ED351273.

Silver, E. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *ZDM – Zentrallblatt fur Didaktik der Mathematik*

Speer, N. M. (2008). Connecting Beliefs and Practices: A Fine-Grained Analysis of a College Mathematics Teacher's Collections of Beliefs and Their Relationship to His Instructional Practices. *Cognition and Instruction 26:2*, 218– 267.

Stein, M., Engle, R., Smith, M., & Hughes, E. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning,*

Sternberg, R. (1996). What is mathematical thinking? Teoksessa Sternberg, R. & Ben-Zeev, T.(toim.) *The nature of mathematical thinking.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Sundqvist, J. (2012). *Derivaatan oppimiseen syvyyttä tutkivalla oppimisella.*

Thompson, A. G. (1992). Teachers' Beliefs and Conceptions: A Synthesis of the Research. Teoksessa D. A. Grouws (toim.) *Handbook of research on Mathematics Teaching and Learning* (s. 127–146). New York: MacMillan.

Tossavainen, T. & Sorvali, T. (2004). Matematiikka, koulumatematiikka ja didaktinen matematiikka. *Tieteessä tapahtuu 2003:8, 30-35.*

Vainionpää, Jorma & Joutsenlahti, Jorma (2010). Opettajien matematiikkakuva. Teoksessa E. K. Niemi & J. Metsämuuronen (toim.), *Miten matematiikan taidot kehittyvät? Matematiikan kansalliset oppimistulokset peruskoulun viidennen vuosikuokan jälkeen vuonna 2008* (s. 149–164). Helsinki: Opetushallitus.

7. Liitteet

7.1. Liite 1: kysymyslomake

A. TAUSTAKYSYMYKSET

* 1. Ikä (vuotta)

2. Korkein suorittamani tutkinto on (rastita yksi vaihtoehto)

- ☐ Ylioppilas
- ☐ Alempi korkeakoulututkinto
- ☐ Ylempi korkeakoulututkinto
- ☐ Lisensiaatti
- ☐ Tohtori

* 3. Tutkinnon pääaineeni oli

4. Olen muodollisesti pätevä matematiikan opettaja

- ☐ Kyllä
- ☐ Ei

* 5. Tämän lukuvuoden päättyessä olen työskennellyt opettajana (vuotta)

* 6. Tämän lukuvuoden päättyessä olen työskennellyt luokkien 7-9 matematiikan opettajana (vuotta)

* 7. Tämän lukuvuoden päättyessä olen työskennellyt lukion matematiikan opettajana (vuotta)

8. Sukupuoli

- ☐ Mies
- ☐ Nainen

B. NÄKEMYKSESI TUTKIVASTA OPPIMISESTA

Tutkivaa oppimista voidaan pitää yhtenä lähetymistapana oppimiseen ja opettamiseen. Vastaa seuraavaan kysymykseen tutkivasta oppimisesta.

* Miten omasta mielestäsi määrittelisit käsitteen "tutkiva oppiminen"?

Voit myös antaa esimerkkejä tutkivasta oppimisesta

C. NÄKEMYKSESI KAHDESTA OPETUKSEN LÄHESTYMISTAVASTA

Lue seuraavat kuvaukset kahdesta opettajasta ja vastaa niitä seuraaviin neljään kysymykseen.

Maisteri Mäki ohjasi luokkaansa vilkkaasti, kysyen kysymyksiä, joihin oppilaat pystyivät vastaamaan nopeasti edellisenä päivänä lukemansa perusteella. Kertauksen jälkeen maisteri Mäki opetti luokalle uuden aihealueen, jälleen pitäen oppilaat kysymyksillään tarkkaavaisina ja keskittyneinä opetukseen.

Maisteri Niemi ohjasi myös luokkaansa kysymyksillä, mutta monet kysymyksistä olivat sellaisia, joiden ratkaisemiseksi oppilailla ei ollut edellisten tuntien pohjalta kaikkia tarvittavia tietoja. Oppilaat saivat kokeilla opettajan kysymyksiin rohkeasti erilaisia ratkaisuyrityksiä ja opettaja kannusti myös oppilaita kysymään. Vaikka maisteri Niemi muotoili useimpia oppilaiden kysymyksiä selkeämmäksi ja ehdotti miten oppilaat voisivat itse löytää vastauksen, hän ei varsinaisesti vastannut useimpiin oppilaiden kysymyksiin itse.

Vastausvaihtoehdot:
1 = Ehdottomasti maisteri Mäen,
2 = Ennemmin maisteri Mäen,
3 = En osaa sanoa,
4 = Ennemmin maisteri Niemen,
5 = Ehdottomasti maisteri Niemen

* 1. Kumman tyyppisestä luokkakeskustelusta pitäisit enemmän omassa luokassasi?	--Valitse tästä--
* 2. Kumman tyyppisestä keskustelusta uskoisit useimpien oppilaiden pitävän enemmän?	--Valitse tästä--
* 3. Kumman tyyppisestä keskustelusta uskoisit oppilaiden oppivan paremmin ratkaisemaan matemaattisia tehtäviä?	--Valitse tästä--
* 4. Kumman tyyppisen keskustelun uskoisit kehittävän enemmän oppilaiden arkielämässä tarvittavia taitoja?	--Valitse tästä--

D. NÄKEMYKSESI HYVÄSTÄ MATEMATIIKAN OPETTAMISESTA JA OPPIMISESTA

(Täysin eri mieltä) 1…2…3…4…5 (Täysin samaa mieltä)

* 1. Matematiikkaa tulee opettaa avoimena systeeminä, joka kehittyy hypoteesien ja umpikujien kautta.	--Valitse tästä--
* 2. Toisinaan opetus tulisi järjestää ainerajat ylittävinä projekteina, joille tulisi luoda myös edellytykset (esimerkki projektista: akvaarion ostaminen ja hoitaminen).	--Valitse tästä--
* 3. Tärkeintä matematiikan opetuksessa on runsas toistoharjoittelu.	--Valitse tästä--
* 4. Matematiikan opetuksessa pitäisi käyttää oppimispelejä.	--Valitse tästä--
* 5. Oppilaiden pitäisi käyttää mahdollisimman paljon konkreettisia havainnollistamisvälineitä (esimerkiksi pahvisia kappaleita).	--Valitse tästä--
* 6. Kaavojen opettelua ulkoa tulee painottaa.	--Valitse tästä--
* 7. Tärkeintä on saada oikea ratkaisu.	--Valitse tästä--
* 8. On tärkeää saada oppilaat kysymään aiheeseen liittyviä omia kysymyksiä.	--Valitse tästä--

* 9. Tulee ratkoa runsaasti rutiinitehtäviä, joissa tunnettu menetelmä johtaa varmasti ratkaisuun. --Valitse tästä--

* 10. Tärkeintä on opettaa matemaattisia tietoja, kuten faktoja ja tuloksia. --Valitse tästä--

* 11. Oppilaiden tulee kehittää useita erilaisia ratkaisutapoja, ja niistä tulee keskustella. --Valitse tästä--

* 12. Oppilaiden tulee muotoilla tehtäviä ja kysymyksiä itse sekä etsiä niihin ratkaisuja. --Valitse tästä--

* 13. Opetuksessa tulisi käyttää mahdollisimman usein tehtäviä, jotka edellyttävät pohtimista ja joita ei voi ratkaista vain laskemalla. --Valitse tästä--

* 14. Oppilaiden ei tarvitse drillata (toistoharjoitella) rutiineja, jotka voi tehdä tietokoneella. --Valitse tästä--

E. TAVALLINEN OPPITUNTISI

Kuinka paljon painotat seuraavia asioita opetuksessasi?
(en lainkaan) 1 … 2 … 3 … 4 (hyvin paljon)

* 1. Kaavojen ja sääntöjen ulkoaopettelu.	--Valitse tästä--
* 2. Rutiinitehtävien ratkaiseminen tunnettujen faktojen, käsitteiden ja ratkaisumenetelmien avulla.	--Valitse tästä--
* 3. Sellaisten ongelmien pohtiminen, joihin ei ole itsestään selvää ratkaisumenetelmää.	--Valitse tästä--
* 4. Arkielämässä esiintulevien matemaattisten ongelmien ratkaiseminen.	--Valitse tästä--
* 5. Omien menetelmien keksiminen monimutkaisten ongelmien ratkaisemiseksi.	--Valitse tästä--
* 6. Pienryhmätyöskentely.	--Valitse tästä--
* 7. Sellaisten ongelmien ratkaiseminen, joihin on yksiselitteinen vastaus.	--Valitse tästä--
* 8. Säännönmukaisuuksien tutkiminen ja etsiminen itsenäisesti.	--Valitse tästä--
* 9. Työskentely tietotekniikkaa (esimerkiksi GeoGebraa) apuna käyttäen.	--Valitse tästä--
* 10. Työskentely graafisten laskinten kanssa.	--Valitse tästä--
* 11. Kysymyksien asettaminen itse jonkin aineiston pohjalta.	--Valitse tästä--
* 12. Projektitöiden tekeminen.	--Valitse tästä--
* 13. Työskentely ongelmien parissa, joihin EI ole yksiselitteistä oikeaa ratkaisua.	--Valitse tästä--
* 14. Ratkaisujen etsiminen tehtäviin, joiden teoreettista taustaa ei vielä ole opetettu.	--Valitse tästä--

7.2. Liite 2: ehdotus uudeksi opetussuunnitelmaksi

Matematiikassa uusi opittava asia pohjautuu aina aikaisemmin opittuun ja harjoiteltuun tietoon ja taitoon. Siksi opetuksessa on alati pohjustettava seuraavan asiakokonaisuuden vaatimia matemaattisia käsitteitä. Seuraavassa lehtori Heikki Pokelan opetussuunnitelmaehdotus:

Kalle Väisälä toteaa algebran oppikoulukirjan esipuheessa (tässä lyhennettynä): *"Perustelin suhteellisen laajan differentiaali- ja integraalilaskentaa koskevan esityksen sisällyttämistä seuraavasti: 'Olen halunnut täten valmistaa matematiikkaa harrastaville oppilaille tilaisuuden tutustua näihin kiintoisiin ja muuta matematiikkaa syventäviin sekä – jatko-opintoja silmällä pitäen – hyödyllisiin asioihin.' "*

Itse asiassa Väisälä aloitti analyysissä tarvittavien asioiden opettamisen jo ennen oppikoulun lukioluokkia; erotusosamääriin liittyviä sievennystehtäviä löytyy hänen suunnittelemistaan keskikoulukirjoista.

Mielestäni uudessa opetussuunnitelmassa tulisi palauttaa Väisälän näkemysten mukainen opetus, joka mahdollistaa oppilaille avainkäsitteiden omaksumisen ja -rutiinien muodostumisen pitkän ajan kuluessa.

Pohjustettavia rutiineja ovat mielestäni ainakin:

1. **Rationaalilausekkeet.**

2. **Integrointitekniikka.** Muutamassa viikossa opetettu integrointitekniikka aiheuttaa suurimmalle osalle opiskelijoista ongelmia: esimerkiksi sisäfunktion derivaatta yhdistetyn funktion integroinissa jää usein melko hämäräksi asiaksi.

3. **Parametrisointi ja napakoordinaatisto.** Alkeistasolla parametrisointi voidaan mieltää samaksi kuin uuden muuttujan sijoittaminen.

4. **Trigonometristen funktioiden esittely yksikköympyrän avulla** on opetettava mahdollisimman aikaisin. Kulman käyttö muuttujana trigonometrisissa funktioissa vaatii pitkäaikaista harjoittelua. Trigonometristen identiteettien harjoittelua on sisällytettävä useampaan kurssiin. Myös napakoordinaatiston ymmärtämiselle jää liian vähän aikaa, jos yksikköympyrää ei esitetä viimeistään kolmannen lukiokurssin alkupuolella.

5. **Polynomilaskenta** on syytä aloittaa jo seitsemännen luokan syksyllä yhdistelemällä

samanmuotoisia termejä. Seitsemännen luokan keväällä käydään ensimmäisen asteen yhtälö- ja binomikaava alustavasti.

6. Koulumatematiikassa **kahden keskeisimmän todistustekniikan, algebrallisen lausekkeen neliön ei-negatiivisuuden ja induktion, harjoittelu ja käyttö.**

7. **Kahden muuttujan funktion z = f(x,y) kuvaajien hahmottaminen yksinkertaisissa tapauksissa** tulisi aloittaa jo lukion ensimmäisenä vuonna, jotta toisena vuonna kurseilla MA7 ja MA8 voitaisiin ko. kuvaajiin tutustua lisää ja perehtyä riittävän yksinkertaisten kahden muuttujan funktioiden tutkimiseen analyysin keinoin sekä tangenttitasoon. Siten kurssin MA13 osasisältönä tämän kertaus ja syventäminen antaisi hyvät valmiudet jatko-opintojen ensimmäisenä vuonna mieltää esimerkiksi ominaisarvoteoriaan pohjautuvan yleisten toisen asteen pintojen pääakselikoordinaattien haun. Jos kahden muuttujan funktiot koetaan liian raskaiksi käsitellä lukion toisena vuotena, siirretään niiden esitys kokonaisuudessaan kurssille MA13. Osittaisderivaatan ymmärtäminen on kuitenkin olennainen asia jo lukiossa.

Kurssikohtainen OPS-ehdotus

Koska suomalaisen koulujärjestelmän kipupisteet ovat erityisesti matematiikan yläkoulun ja lukion oppisisällöissä, keskityn ehdotuksessani niihin. Yleisesti matematiikan opetuksessa tulisi valaista tieteenalan historiaa ja merkitystä sekä uusien teorioiden esittelyn yhteydessä että tehtävänannoin.

Seuraava OPS-ehdotus on yksi näkemys matematiikan oppisisällöistä sille osalle ikäluokkaa, jonka kiinnostus, kyvyt ja pitkäjänteisyys riittävät useiden vuosien työntekoon. Lopputuloksena pitäisi syntyä todellinen korkeakoulukelpoisuus, eli kyky aloittaa matemaattisluonnontieteellis-teknillistieteelliset opinnot.

Muulle osalle ikäluokkaa nykyisestä hieman kevennetty, laskentopuolta korostava versio OPSista toimisi parhaiten.

ALAKOULUN 6. LUOKKAAN MENNESSÄ:

Tässä esitetyt kohdat eivät kata koko alakoulun matematiikan kokonaisuutta, vaan ne on mainittu tässä siksi, että niiden osaaminen on erityisen tärkeää jatkon kannalta.

- Murtolukujen yhteen- ja vähennyslasku sekä kertominen ja jakaminen.

- Osittamisen, eli jakamisen ymmärtäminen: esimerkiksi jakolasku 1/2 jaettuna 1/4:lla tarkoittaa, kuinka monta neljäsosaa mahtuu yhteen kahdesosaan. Tässä kohden olisi syytä kirjata velvoite havaintovälineiden käyttöön murtolukujen opetuksessa.
- Desimaalilukujen ja murtolukujen muuttaminen toisikseen.
- Prosenttilaskentaa.
- Muuttujan esittely.
- Päättelyin ratkaistavia yhtälöitä kuten esimerkiksi $x + 15 = 22$, $12 - x = 3$ ja $5 + 2x = 11$.

7. LUOKKA:

- Sulkulausekkeiden käsittely.
- Polynomilaskennan alkeet.
- Ensimmäisen asteen yhtälö vaakakuppimallilla ja sen jälkeen termien siirrolla yhtälön puolelta toiselle.
- Binomikaava alustavasti.
- Suoran piirtäminen annetusta funktiosta.
- Itseisarvon määritelmä etäisyytenä origosta.
- Valtakunnalliset tasokokeet, joilla aloitetaan eriyttävä opetus joko luokan sisäisesti tai erillisissä tasoryhmissä.

8. LUOKKA:

- Polynomilaskennan vahvistaminen.
- Yksinkertaisia rationaalilausekkeita.
- Yhteisen tekijän hakeminen ja supistaminen.
- Prosenttilaskentaa polynomiyhtälöiden avulla.
- Suoran yhtälön muodostaminen ja yhtälön osien (kulmakerroin, vakio) ymmärtäminen.
- Suorien leikkauspisteet geometrisesti ja algebrallisesti.
- Kolmion kulmien summan todistaminen.
- Tutustuminen geometrian perusväittämiin: yhdenmuotoisuuden alkeet lähtien

karttamittakaavasta tms.

- Funktion käsitteen syventäminen: määrittelyjoukko ja arvojoukko.
- Ensimmäisen asteen epäyhtälöitä.
- Vektoreiden yhteen- ja vähennyslasku.
- Trigonometrian alkeet suorakulmaisen kolmion avulla: sini, kosini ja tangentti.
- Trigonometristen funktioiden riippumattomuus mittakaavasta.
- Luonnollisten lukujen jakaminen tekijöihin.
- Jaollisuus luvuilla 2, 3, 5 ja 9.
- Parillisuuden ja parittomuuden ominaisuuksia.
- Valtakunnalliset tasokokeet, joilla aloitetaan eriyttävä opetus tasoryhmissä. Erillinen OPS jokaiselle ryhmälle.

9. LUOKKA:

- Algebrallisten lausekkeiden käsittelyä (ml. neliöjuurilausekkeet ja lausekkeilla laventaminen ja supistaminen).
- Binomikaavojen ja neliöksitäydentämisen harjoittelua.
- Funktio ja sen käänteisfunktio yksinkertaisille ensimmäisen asteen polynomifunktioille.
- Käänteistoimituksen havainnollistaminen peilauksena suoran y=x suhteen.
- Ympyrän kehäkulmalauseet.
- Tasogeometrian todistuksia soveltuvin osin (mm. kolmion merkillisiä pisteitä ja Pythagoraan lause).
- Paraabelin yhtälö ja kuvaaja.
- Toisen asteen yhtälön ratkaiseminen tulomuodosta.
- Polynomin jakaminen jakokulmassa.
- Yhtälöryhmien ratkaiseminen.
- Neliöjuurilausekkeiden sieventäminen.
- Ensimmäisen asteen epäyhtälöiden kertaus.
- Itseisarvoyhtälöitä.
- Potenssisääntöjen kertaus ja negatiivinen eksponentti.

- Yksinkertaisia juuriyhtälöitä.
- Vektoreiden laskutoimituksia.
- Vektorin projektio suorakulmaisen kolmion trigonometrian avulla.
- Induktiotodistuksen hahmottaminen yksinkertaisilla jonomalleilla.
- Luonnollisten lukujen suurin yhteinen tekijä ja pienin yhteinen jaettava.

LUKION PITKÄ MATEMATIIKKA:

MA1 Funktioita ja yhtälöitä:

- Lukualueet ja laskutoimitukset.
- Erilaisten lukujärjestelmien esittelyä, esimerkiksi 2-, 7- ja 12-kantaiset järjestelmät.
- Peruslaskutoimitukset ja jakokulma eri lukujärjestelmissä.
- Lineaariset funktiot.
- Suoran yhtälön kertaus muodoista y = kx + b ja (y – y_o) = k(x – x_o).
- Käänteisfunktion idea peilauksena suoran y = x suhteen ja algebrallisesti.
- Suoran yhtälö parametrin avulla (esim. y = 2t + 3, x = t – 1).
- Juuri ja murtolukueksponentti.
- Eksponentti- ja logaritmifunktioiden alkeet.
- Eksponentti ja logaritmifunktiot toistensa käänteisfunktioina geometrisella perustelulla.
- Peruskoulussa opittujen binomikaavojen kertaus.
- Yhtälöryhmien kertausta.
- Yhtälöparin ja -ryhmän muodostaminen.
- Itseisarvoyhtälöitä.
- Juuriyhtälöitä.
- Epäyhtälöitä.
- Induktiotodistuksen alkeet.
- Newtonin binomikaava.

MA2 Polynomialgebraa:

- Toisen asteen lausekkeiden ominaisuuksia, esimerkiksi ääriarvon haku neliöksi täydentämällä.
- Toisen asteen yhtälön ratkaisu neliöksi täydentämällä.
- Toisen asteen polynomin nollakohtien ja jaollisuuden välinen yhteys.
- Juurten summan ja tulon yhteys jaollisuuteen.
- Toisen asteen yhtälön ratkaisukaava.
- Paraabelin yhtälö parametrin avulla.
- Toisen asteen epäyhtälöitä.
- Korkeamman asteen yhtälöitä ja epäyhtälöitä.
- N-asteisen polynomin tekijä (x – x_o), missä x_o on nollakohta.
- Edelliseen induktiotodistus, eli että (a – b) voidaan ottaa aina tekijäksi lausekkeesta (a^n – b^n).
- Aritmeettinen ja geometrinen summa.
- Toisen ja korkeamman asteen murtoepäyhtälöitä.
- Sijoittamalla yhtälön palauttaminen toisen asteen yhtälöksi.
- Uuden muuttujan sijoittamisen merkitys sievennyksissä.
- Polynomien jakamisen jakokulmassa kertaus.
- Syventävänä asiana korkeamman asteen polynomien nollakohtien, juurien summien ja tulon yhteys polynomin tekijöihin (Vietan kaava soveltuvin osin).
- Yhtälön iteratiivinen ratkaisu haarukoimalla.

Kurssit MA3–MA5 käsittelevät geometrian kolmea osa-aluetta: vektoreita, (taso- ja avaruus)geometriaa ja analyyttistä geometriaa. Näiden aihepiirien keskinäinen järjestys on ikivanha ongelma, sillä jokaista niistä voidaan käyttää apuna toistensa ymmärtämiseen.

Tässä ehdotuksessa avaruusgeometriaa ja avaruuden vektoreita käsitellään omalla kurssillaan ennen kartioleikkauksia, jotta riittävän monessa kurssissa saataisiin aikaa harjoitella napakoordinaatiston käyttöä ennen sen soveltamista analyyttisen geometrian kartioleikkauksiin. Kurssijärjestys voisi olla tässä kohtaa myös toisinpäin. Koska vektoreita ja geometriaa opetetaan molempia tämän OPS-ehdotuksen mukaan alustavasti yläkoulussa, se mahdollistaa helpommin edellä mainittujen kolmen osa-alueen käsittelyn yhdessä kokonaisuudessa lukiokursseilla.

MA3 Kolmion ja muiden monikulmien geometriaa:

- Tasogeometrian keskeisimpien väitteiden todistaminen (mm. kolmion merkilliset pisteet, pisteen potenssi, Ptolemaioksen, Thalesin ja Menelaoksen lauseet).
- Kolmion ja ympyrän ominaisuuksien käyttö geometrisissa todistuksissa.
- Induktiotodistuksia: esimerkiksi monikulmioiden kulmien summa.
- Trigonometriset funktiot yksikköympyrän avulla.
- Radiaanin käsite.
- Sinilause ja kosinilause.
- Vektoreiden skalaaritulo ja käyttö soveltuvien tasogeometrian ominaisuuksien osoittamisessa.
- Paikan ilmoittaminen koordinaatistossa etäisyyden ja kulman avulla.

MA4 Avaruusgeometriaa:

- Avaruusgeometriaa.
- Kappaleiden yhdenmuotoisuus.
- Avaruusvektorit.
- Normaalivektori skalaaritulon avulla (oppimateriaaleissa tulee olla syventävänä materiaalina normaalivektori vektoritulon avulla).
- Tason yhtälö.
- Tason ja avaruuden suoran yhtälö suuntavektoreiden avulla.
- Tasojen ja suorien leikkauspisteitä ja etäisyyksiä.
- Avaruuden suoran eri esitysmuotoja, mm. kahden tason leikkauksena jne.
- Vektorifunktion alkeet karteesisessa- ja napakoordinaatistossa parametrin avulla.
- Radiaanin käyttö.
- Kartioleikkausten napakoordinaatistoyhtälöiden harjoittelua “kokeellisesti” ilman kyseisten käyrien esittelyä.

MA5 Ympyrän ja muiden kartioleikkausten geometriaa:

- Itseisarvoyhtälöitä ja epäyhtälöitä.
- Napakoordinaatiston käytön varmentaminen.
- Vektoriopin käyttö analyyttisessa geometriassa.
- Kartioleikkausten esittely.
- Kartioleikkausten yhtälöt polttopisteen, johtosuoran ja eksentrisyyden avulla.
- Kartioleikkausten uraominaisuuksien avulla niiden yhtälöiden johtaminen karteesiseen koordinaatistoon.
- Yhtälöryhmien ja tasojen yhteys.
- Pallo ja pinta $z = f(x,y)$ koordinaatistossa.

MA6 Todennäköisyyslaskentaa:

Sisältää vanhan OPSin logiikan, joukko-oppia, kombinatoriikkaa ja diskreettejä satunnaismuuttujia. Jatkuva jakauma siirretään kurssiin 10 integraalien opettelun jälkeen.

MA7 Differentiaalilaskentaa:

- Erotusosamäärän raja-arvo.
- Derivaatta myös differentiaalien osamääränä dy/dx.
- Polynomin derivaatta ja derivoinnin käänteistoimitus.
- Väliarvolause geometrisesti perusteltuna.
- Alkeisfunktioiden derivaattojen yhteydessä harjoitellaan myös käänteistoimitusta, eli integraalifunktion hakua yksinkertaisissa tapauksissa.
- Derivaatan sovelluksia muutosnopeutena, funktion tangenttina ja ääriarvoissa.
- Kahden muuttujan funktion tutkimista.
- Käyrän tangentin sovelluksena nollakohtien iteratiivinen ratkaisu Newtonin menetelmällä.

MA8 Differentiaali- ja integraalilaskentaa:

- Juuri-, eksponentti- ja logaritmifunktioiden derivointi ja integrointi.
- Yhdistetyn funktion derivoimissääntö.
- Osittaisintegrointi.

- Parametrisen derivaatan dy/dx = (dy/dt)/(dx/dt) ymmärtäminen.
- Parametrisoitujen käyrien ominaisuuksia analyysin avulla tutkittuna.
- Käänteisfunktioiden teoriaa.
- Hyperbolisten funktioiden määritelmä, kuvaajat ja derivaatat sekä integraalifunktio.
- Osittaisderivaatta ja pintojen tangenttitaso.

MA9 Trigonometriset funktiot:

- Trigonometriset funktiot, niiden derivaatta- ja integraalifunktiot ja niiden käänteisfunktioiden esittely.
- Trigonometristen funktioiden summa- ja erotuslausekkeiden johtaminen esimerkiksi napakoordinaatiston kantavektoreiden kierrolla.
- Trigonometrisia yhtälöitä.
- Skalaarimuuttujan vektoriarvoisen funktion derivaatta.
- Napakoordinaatiston kantavektoreiden yhteys toisiinsa derivoinnissa.

MA10 Integraalilaskentaa:

- Määrätty integraali ja sen yhteys integraalifunktioon.
- Pinta- ja tilavuusalkioiden muodostaminen karteesisessa- ja napakoordinaatistossa määrättyä integraalia varten.
- Integrointi sijoituksen ja osamurtojen avulla.
- Integraalifunktion ominaisuuksia itseisarvojen ja paloittain määriteltyjen funktioiden tapauksessa.
- Erilaisten kappaleiden, kuten esimerkiksi kartioiden ja pallokalottien tilavuuksien ja pinta-alojen laskeminen.
- Numeerisia menetelmiä pinta-alan laskemiseen kuten puolisuunnikas ja Simpson.
- Jatkuva jakauma.

Valtakunnallisia syventäviä kursseja:

MA11 Lukuteoriaa:

Kuten nykyään, mutta aikaa käytetään kokonainen kurssi. Suositellaan lukion ensimmäiselle vuodelle. Syventävänä aineistona voidaan käyttää vanhoja matematiikkakilpailujen lukuteoriatehtäviä ja valmennuksessa käytettyjä materiaaleja.

- Induktion käyttö mm. jaollisuuden tarkastelussa.
- Newtonin binomikaavan todistus induktiolla.
- Ryhmäteorian alkeet lähtien kertolaskuilla jäännösluokissa.
- Fermat'in ja Eulerin lauseet.
- Aritmeettis-geometrinen epäyhtälö.

MA12 Lukujonot ja sarjat:

Melkein kuten vanhan (1994) OPSin vastaava kurssi.

- Raja-arvon määritelmä delta/epsilonmenetelmällä.
- Analyysin keinoin tarkastellaan sarjojen suppenemisominaisuuksia.
- Geometrisen sarjan raja-arvo.
- Suppenemistestejä: integraali-, juuri- ja suhdetesti, majorantin/minorantin lisäksi.
- Induktiotodistuksen kertaus lausekkeiden jaollisuuden tutkimisessa (MA11 kurssilta).
- Induktiotodistuksen käyttö lukujonojen ja sarjojen ominaisuuksien tutkimisessa.
- Neperin luvun raja-arvon tarkastelua.
- Epäolennaisia integraaleja.
- Alkeisfunktioiden sarjakehitelmien esittely.

MA13 Analyysin jatkokurssi:

- Syklometriset ja hyperboliset funktiot integroinnissa.
- Separoituvat ja lineaariset ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöt sovelluksineen.
- Eksponentiaalinen ja logistinen muutos.
- Syventävänä aiheena toisen kertaluvun vakiokertoiminen differentiaaliyhtälö yksinkertaisimmassa erikoistapauksessa.
- Usean muuttujan funktioiden kertausta: osittaisderivaatta ja usean muuttujan

funktioiden ääriarvoja. (Jos usean muuttujan funktioita ei ole käsitelty aiemmilla kursseilla, ne opiskellaan tässä uutena asiana.)

- Kompleksiluvut.
- Kompleksilukujen napakoordinaattiesitys, potenssi ja juuri.
- Syventävänä aiheena kompleksinen logaritmi, eksponenttifunktio ja kompleksisten trigonometristen ja hyperbolisten funktioiden yhteys.

Kurssin MA13 opetukseen käytettävä aika tuskin riittää kattavasti jokaiseen aihealueeseen, joten tässä kohden opettajan on valittava, paljonko käyttää oppitunteja kompleksilukuihin.

MA14 Kertaus:

Sopivia sisältöjä kertaukseen olisivat mm. seuraavat:

- Lausekkeiden vertailu toisiinsa.
- Liittolausekkeella laventamisen idean kertaus mm. raja-arvotehtävissä.
- Tasogeometrian yhteydessä kolmion Eulerin suora (kts. yo 1923K/7) ja kolmion ominaisuuksia kokoava Cevan lause.
- Logaritmien kantalukujen muutoksia vaativia yhtälöitä/epäyhtälöitä.
- Todennäköisyyden ja ääriarvotehtävien yhdistelmiä (maksimoi tai minimoi todennäköisyys tai odotusarvo).
- Avaruusgeometristen väittämien todistaminen vektoriopilla.
- Lukujonoja, sarjoja ja lukuteoriaa sekä trigonometriaa yhdistäviä tehtäviä, esimerkiksi integraali sin(mx)cos(nx)-tyyppisiä tietyllä välillä ortogonaalisia integraaleja. Tällöin kertaantuvat trigonometriset integraalit/derivaatat, osittaisintegrointi, lukujonot, rekursio ja induktio yhdessä.

Lisäksi oppilaille ja opiskelijoille voisi tarjota opintojen eri vaiheissa itseopiskelumateriaaleja, jotka sisältäisivät esimerkiksi seuraavia aihelaueita:

- Katsauksia Egyptin, Babylonian, Kreikan, Intian ja intiaanikulttuurien matematiikkaan.
- Suomalaisen matematiikan tutkimuksen historiaa.
- Matematiikka suomalaisessa koulujärjestelmässä tsaarinajalta nykypäivään.

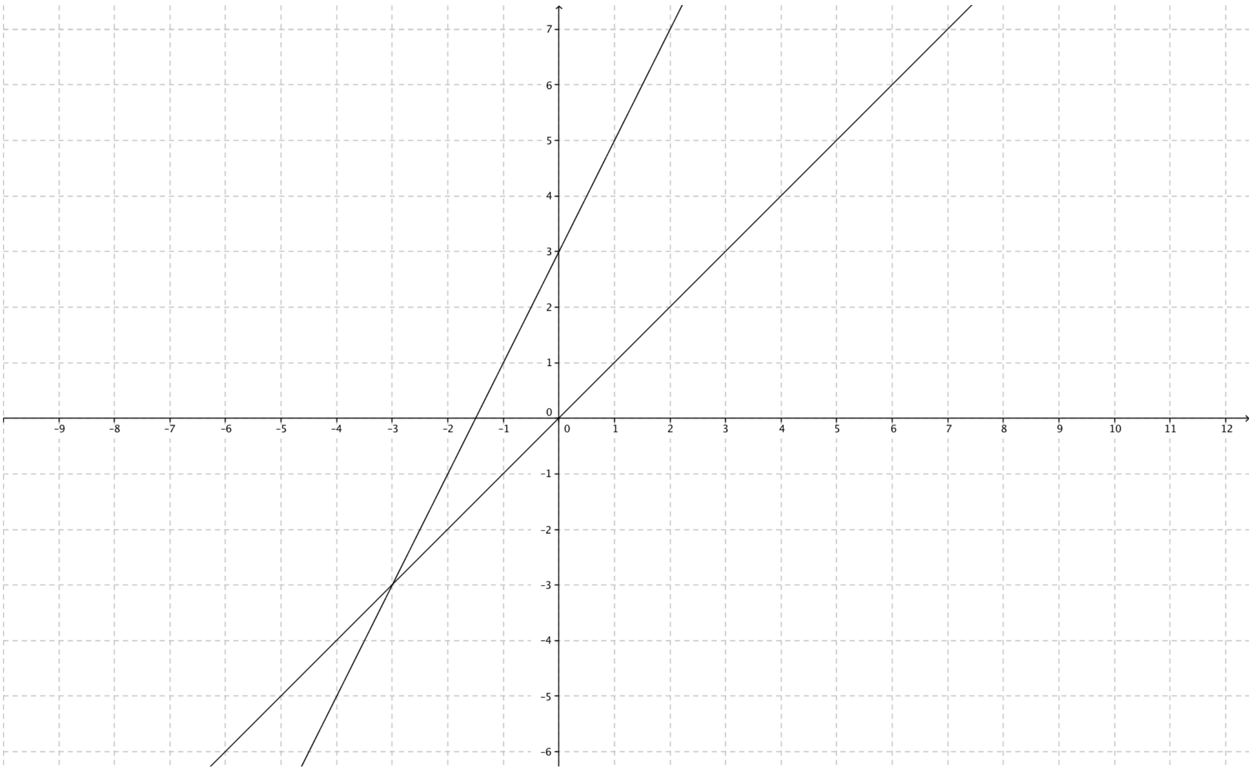
- Arkhimedeen, Apolloniuksen, Keplerin, Newtonin ja Gaussin keksintöjen merkitys.
- Katsauksia eri maiden järjestämien matematiikkakilpailujen geometrian tehtäviin eri aikakausilta.

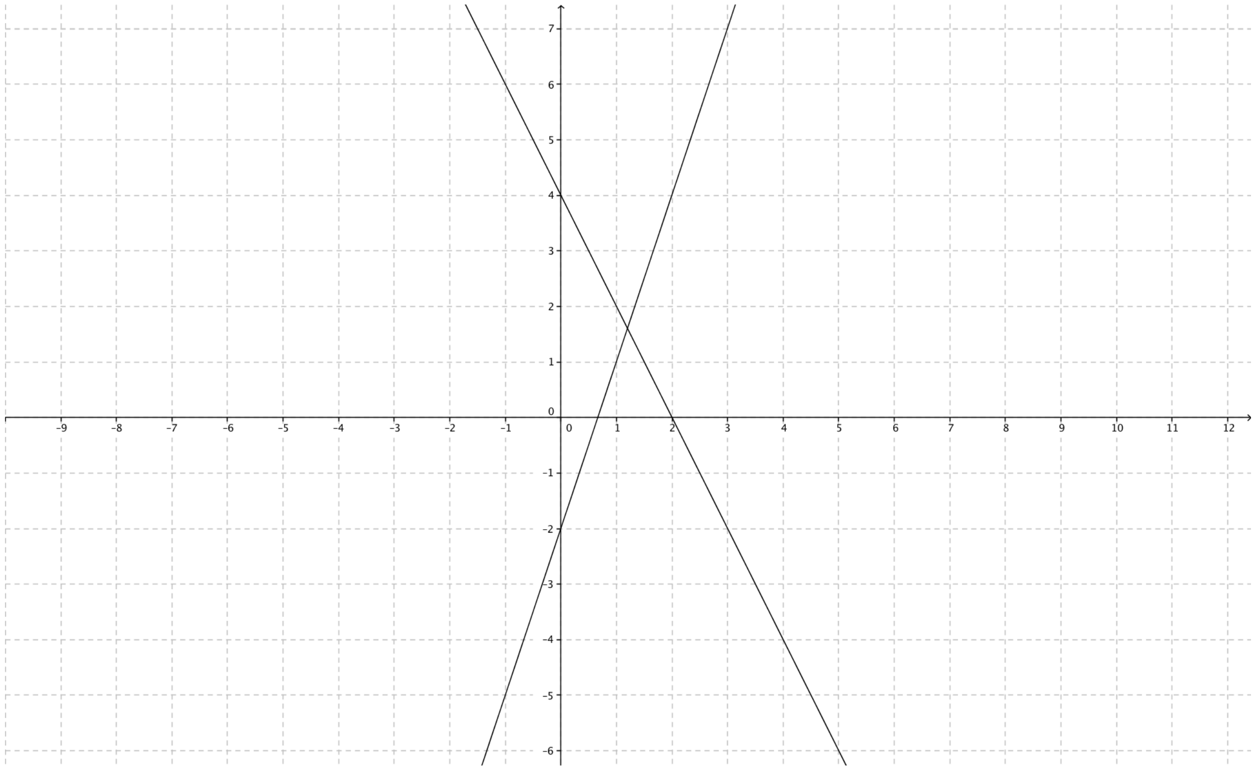
Olisi mielenkiintoista ulottaa OPS-tarkastelu myös korkeakoulun puolelle esimerkiksi yhden jatkokoulutusalan muodossa, eli miten siinä matematiikan opinnot lähtevät rakentumaan ensimmäisten kahden lukuvuoden aikana.

Lopuksi toivoisin paitsi runsasta keskustelua myös mahdollisimman suurta avoimuutta tulevien opetussuunnitelmien laadintaan. Parhaimmillaan asiasta käytävä julkinen keskustelu – johon näillä LUMA-Sanomienkin sivuilla on osallistunut aktiivisesti matematiikan opetuksen valtakunnantason ammattilaisia – voisi toimia pohjana OPSin laadinnassa.

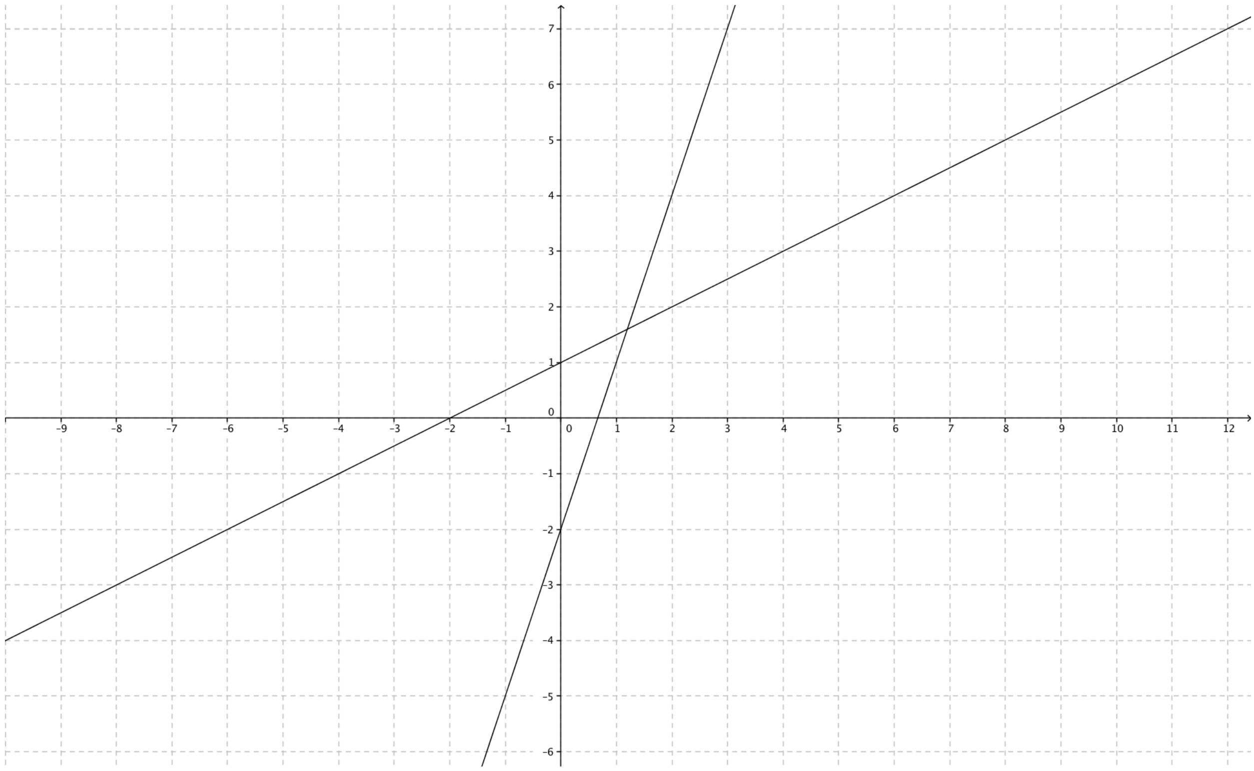
Teksti: Heikki Pokela, lehtori, Tapiolan lukio. Kuva: Sakari Tolppanen.

7.3. Liite 3: suoria ja paraabeleja

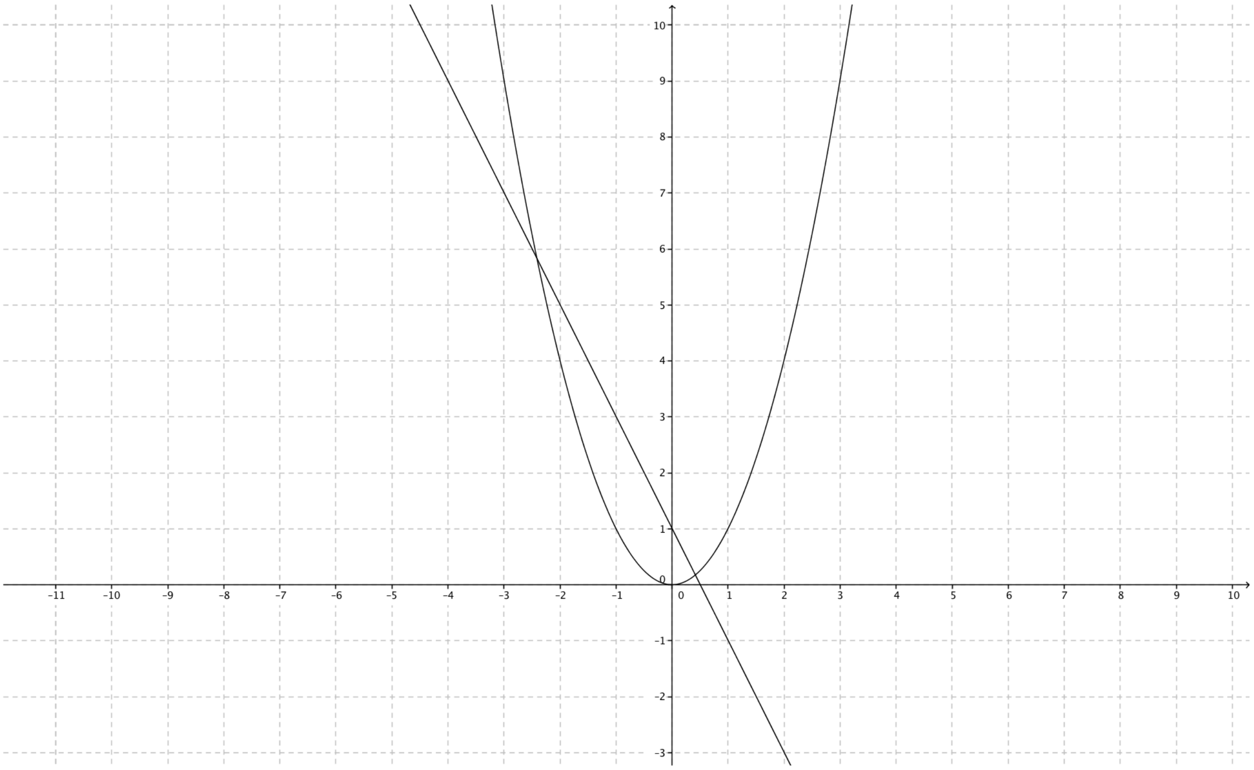




-9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12
7 6 5 4 3 2 1 0 -1 -2 -3 -4 -5 -6



-9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12
7 6 5 4 3 2 1 0 -1 -2 -3 -4 -5 -6



10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-11
-10
-9
-8
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10