Fuchsin ryhmät

Määritelmä: Topologinen ryhmä on ryhmä G, joka on myös topologinen avaruus ja jolle pätee:

1) yhden pisteen joukot ovat suljettuja,

2) kuvaus $\mu : G\times G \to G$, $(x,y)\mapsto xy$, on jatkuva kun ryhmänä $G\times G$ on tulotopologia,

3) kuvaus $i : G\to G$, $x\mapsto x^{-1}$, on jatkuva.

Esimerkki $\mathbb{R}$ ja $\mathbb{Z}$ yhteenlaskulla varustettuna ovat topologisia ryhmiä. $S^1 = \{z\in\mathbb{C} \mid |z|=1\}$ kompleksilukujen kertolaskulla varustettuna on topologinen ryhmä. Mikä tahansa ryhmä diskreetillä topologialla varustettuna on topologinen ryhmä.

Lemma 1. Topologiset ryhmät ovat Hausdorff-avaruuksia.

Tod. Topologinen avaruus X on Hausdorff-avaruus, jos ja vain jos sen lävistäjä $\Delta X = \{(x,x) \mid x\in X\}$ on suljettu tulo-avaruudessa $X\times X$. Olkoon G topologinen ryhmä. Kuvaus $f: G\times G\to G$, $(g,h)\mapsto gh^{-1}$, on jatkuva. Olkoon e ryhmän G neutraalialkio. Koska $\{e\}$ on ryhmän G suljettu osajoukko, on

$$\Delta = \{(g,g) \mid g\in G\} = f^{-1}(e)$$

suljettu ryhmänä $G\times G$. Siis G on Hausdorffin avaruus. $\square$

Olkoon G topologinen ryhmä ja olkoon $h \in G$. Olkoon $c_h : G \to G$, $g \mapsto h$. Tällöin kuvaukset

$$L_h : \quad G \xrightarrow{(c_h, id)} G \times G \xrightarrow{\mu} G$$
$$g \mapsto (h, g) \mapsto hg$$

ja

$$R_h : \quad G \xrightarrow{(id, c_h)} G \times G \xrightarrow{\mu} G$$
$$g \mapsto (g, h) \mapsto gh$$

ovat jatkuvien kuvausten yhdisteinä jatkuvia. Itse asiassa ne ovat homeomorfismeja, koska myös niiden käänteiskuvaukset $L_{h^{-1}}$ ja $R_{h^{-1}}$ ovat jatkuvia. Niinpä, jos U on ryhmän G avoin (suljettu) osajoukko, niin myös joukot

$$hU = h(U) = L_h(U) \quad \text{ja} \quad Uh = R_h(U)$$

ovat ryhmän G avoimia (suljettuja) osajoukkoja.

Olkoon H top. ryhmän suljettu, normaali aliryhmä. Tällöin G/H on ryhmä. Olkoon

$$p : G \to G/H, \quad g \mapsto gH.$$

Tällöin p on surjektio. Määritellään ryhmään G/H topologia seuraavasti: joukko U on avoin ryhmässä G/H, jos ja vain jos sen alkukuva $p^{-1}(U)$ on avoin ryhmässä G. Tällöin p on jatkuva kuvaus.

<u>Lemma 2.</u> Kuvaus $p : G \to G/H$ on avoin kuvaus (eli $p(V)$ on avoin G/H:ssa aina kun V on avoin G:ssä).

Tod. Olkoon U G:n avoin osajoukko. Olkoon $h \in H$. Tällöin Uh on G:n avoin osajoukko. Niinpä

$$p^{-1}(p(U)) = \bigcup_{h \in H} Uh$$

on avoimien joukkojen yhdisteenä G:n avoin osajoukko. Siis $p(U)$ on G/H:n avoin osajoukko. $\square$

Lause 4. Olkoon G topologinen ryhmä ja olkoon H ryhmän G suljettu, normaali aliryhmä. Tällöin G/H on topologinen ryhmä.

Tod. Ks. alg. top. harjoitusten 6 ratkaisut.

Lause 5. Matriisiryhmä $GL(n;\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det A \neq 0\}$ on topologinen ryhmä. ($M_n(\mathbb{R})$ = kaikkien $n \times n$-matriisien joukko, samaistetaan $M_n(\mathbb{R})$ eukl. avaruuden $\mathbb{R}^{n^2}$ kanssa, jolloin sille saadaan topologia.)

Tod. Ks. alg. top. harjoitusten 6 ratkaisut.

Olkoon $\det : GL(n;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $A \mapsto \det(A)$.

Tällöin $SL(n;\mathbb{R}) = \det^{-1}(1)$ on $GL(n;\mathbb{R})$:n suljettu aliryhmä (det on jatkuva kuvaus), joten se on topologinen ryhmä. Erityisesti $SL(2;\mathbb{R})$ on topologinen ryhmä ja

$$Z = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

on $SL(2;\mathbb{R})$:n suljettu, normaali aliryhmä.

Lauseen 4 perusteella

$$PSL(2;\mathbb{R}) = SL(2;\mathbb{R})/Z$$

tekijätopologialla varustettuna on topologinen ryhmä.

Aiemmin todistettiin, että on olemassa ryhmäisomorfismit

$$M\ddot{o}b(\mathbb{H}) \to PSL(2;\mathbb{R})$$

ja

$$M\ddot{o}b(\mathbb{D}) \to M\ddot{o}b(\mathbb{H}).$$

Ryhmille $M\ddot{o}b(\mathbb{H})$ ja $M\ddot{o}b(\mathbb{D})$ saadaan topologiat (joilla varustettuina ne ovat topologisia ryhmiä) kun vaaditaan, että yllä olevat isomorfismit ovat homeomorfismeja.

Ryhmät $M\ddot{o}b(\mathbb{D})$ ja $M\ddot{o}b(\mathbb{H})$ voidaan topologisoida myös määrittelemällä niille metriikat ja metrinen topologia. Näin saadut metriset topologiat ovat samoja kuin aiemmat topologiat, eli ryhmälle $M\ddot{o}b(\mathbb{H})$ (vast. ryhmälle $M\ddot{o}b(\mathbb{D})$) saadaan samat avoimet joukot topologisoidaan se kummalla tahansa tavalla.

<u>Metriikka ryhmälle $M\ddot{o}b(\mathbb{H})$:</u>

Olkoon $h \in M\ddot{o}b(\mathbb{H})$, $h(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, missä $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ ja $ad-bc=1$. Tällöin kuvaus h voidaan kirjoittaa myös muodossa $h(z) = \dfrac{-az-b}{-cz-d}$ ja $(-a)(-d)-(-b)(-c) = ad-bc=1$.

Olkoot sitten $h_1, h_2 \in M\ddot{o}b(\mathbb{H})$ normalisoituja ylemmän puolitason kuvauksia,

$$\gamma_1(z) = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}, \quad \gamma_2(z) = \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}.$$

Määritellään kuvausten γ_1 ja γ_2 väliseksi etäisyydeksi

$$d_{Möb}(\gamma_1, \gamma_2) = \min \{ \|(a_1, b_1, c_1, d_1) - (a_2, b_2, c_2, d_2)\|, \\ \|(a_1, b_1, c_1, d_1) - (-a_2, -b_2, -c_2, -d_2)\| \}.$$

Lause 6. Kuvaus

$$Möb(\mathbb{H}) \times Möb(\mathbb{H}) \to \mathbb{R}, \ (\gamma_1, \gamma_2) \mapsto d_{Möb}(\gamma_1, \gamma_2),$$

on metriikka joukossa $Möb(\mathbb{H})$.

Tod. Harjoitustehtävä.

Samalla tavoin voidaan määritellä metriikka joukkoon $Möb(\mathbb{D})$.

Määritelmä 7. Olkoon (X, d) metrinen avaruus ja olkoon $Y \subset X$. Olkoon $y \in Y$. Jos on olemassa sellainen $\delta > 0$, että kaikille $y' \in Y$, $y \neq y'$, pätee $d(y, y') > \delta$, sanotaan että y on joukon Y eristetty piste.

Yleisemmin, olkoon X topologinen avaruus ja olkoon $Y \subset X$. Olkoon $y \in Y$. Jos on olemassa avaruuden X avoin osajoukko U, jolle $U \cap Y = \{y\}$, sanotaan, että y on joukon Y eristetty piste.

Määritelmä 8. Olkoon (X, d) metrinen avaruus (tai olkoon X topologinen avaruus). Jos kaikki joukon $Y \subset X$ pisteet ovat eristettyjä, sanotaan, että Y on joukon X diskreetti osajoukko.

Määritelmä 9. Ryhmien $\text{Möb}(\mathbb{H})$ ja $\text{Möb}(\mathbb{D})$ diskreettejä aliryhmiä sanotaan **Fuchsin ryhmiksi.**

Esimerkki:

1) Metristen avaruuksien äärelliset osajoukot ovat diskreettejä. Niinpä ryhmien $\text{Möb}(\mathbb{H})$ ja $\text{Möb}(\mathbb{D})$ kaikki äärelliset aliryhmät ovat diskreettejä.

2) Olkoon $\gamma_\theta(z) = \dfrac{\cos(\theta/2)\,z + \sin(\theta/2)}{-\sin(\theta/2)\,z + \cos(\theta/2)}$.

Olkoon $q \in \mathbb{N}$. Tällöin $\{\gamma_{2\pi j/q} \mid 0 \le j \le q-1\}$ on ryhmän $\text{Möb}(\mathbb{H})$ aliryhmä. Poincarén kiekolla tämä aliryhmä vastaa kiertojen muodostamaa aliryhmää $\{z \mapsto e^{2\pi j/q} \mid 0 \le j \le q-1\}$.

3) Kokonaislukusiirrot muodostavat Fuchsin ryhmän $\{\gamma_n \mid \gamma_n(z) = z+n,\ n \in \mathbb{Z}\}$. Kaikkien siirtojen muodostama ryhmä $\{\gamma_b \mid \gamma_b(z) = z+b,\ b \in \mathbb{R}\}$ ei ole Fuchsin ryhmä, koska se ei ole diskreetti.

4) Ryhmä $\{\gamma_n \mid \gamma_n(z) = 2^n z,\ n \in \mathbb{Z}\}$ on Fuchsin ryhmä.

5) Jos Γ on Fuchsin ryhmä ja Γ' on Γ:n aliryhmä, niin Γ' on Fuchsin ryhmä.

6) Möbius-kuvaukset $\gamma(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$, $ad-bc=1$, muodostavat Fuchsin ryhmän, joka on isomorfinen modulaariryhmän $PSL(2;\mathbb{Z})$ kanssa.

7) Ryhmä $\Gamma_q = \{\gamma \mid \gamma(z) = \dfrac{az+b}{cz+d},\ a,b,c,d \in \mathbb{Z},\ ad-bc=1,\ b \text{ ja } c \text{ ovat jaollisia luvulla } q\}$ on Fuchsin ryhmä kaikilla $q \in \mathbb{N}$.

Lause 10. Olkoon Γ ryhmän $\text{Möb}(\mathbb{H})$ aliryhmä. Tällöin seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:

1) Aliryhmä Γ on ryhmän $\text{Möb}(\mathbb{H})$ diskreetti aliryhmä.

2) Neutraalialkio on ryhmän Γ eristetty piste.

Huom. Vastaava tulos on voimassa Poincarén kiekon tapauksena.

Tod. Selvästi $1 \Rightarrow 2$.

$2 \Rightarrow 1$: Oletetaan, että neutraalialkio e on Γ:n eristetty piste. Tällöin on olemassa sellainen ryhmän $\text{Möb}(\mathbb{H})$ avoin osajoukko U, että $\Gamma \cap U = \{e\}$. Olkoon $g \in \Gamma$. Tällöin $g \in gU$ ja gU on avoin ryhmässä $\text{Möb}(\mathbb{H})$. Lisäksi $gU \cap \Gamma = \{g\}$. Siis g on ryhmän Γ eristetty piste. Koska g valittiin mielivaltaisesti, seuraa tästä että Γ on diskreetti. $\square$

Radat

Määritelmä 11. Perhettä $\{M_\alpha \mid \alpha \in A\}$ topologisen avaruuden X osajoukkoja M_α, $\alpha \in A$, sanotaan lokaalisti äärelliseksi, jos kaikilla X:n kompakteilla osajoukoilla K pätee: $M_\alpha \cap K \neq \emptyset$ ainoastaan äärellisen monella $\alpha \in A$.

Määritelmä 12. Olkoon X topologinen avaruus ja olkoon G ryhmä, jonka alkiot ovat avaruuden X homeomorfismeja. Olkoon $x \in X$. Pisteen x <u>rata</u> on

$$Gx = \{g(x) \mid g \in G\}$$

ja sen <u>isotropiaryhmä</u> on $G_x = \{g \in G \mid g(x) = x\}$.

Jos $G_x = \{e\}$ kaikilla $x \in X$, sanotaan, että ryhmä G toimii <u>vapaasti</u> avaruudessa X.

<u>Esimerkki</u>

1) $X = \mathbb{R}$, $G = \{-1, 1\}$
$h_{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto -x$, $h_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x$.

$Gx = \{x, -x\}\quad \forall x \in \mathbb{R}$
$G_x = \{1\}\quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$
$G_0 = \{-1, 1\} \neq \{1\} \Rightarrow$ G:n toiminta $\mathbb{R}$:ssä ei ole vapaa (mutta G:n toiminta $\mathbb{R} - \{0\}$:ssa on vapaa)

2) $X = \mathbb{H}$, $G = \{g_n \mid g_n(z) = z + n,\ n \in \mathbb{Z}\}$

$Gz = \{z + n \mid n \in \mathbb{Z}\}\quad \forall z \in \mathbb{H}$
$G_z = \{g_0\} = \{id_{\mathbb{H}}\}\quad \forall z \in \mathbb{H} \Rightarrow$ vapaa toiminta

3) $X = \mathbb{D}$, $q \in \mathbb{N}$, $G = \{e^{i2\pi j/q} \mid 0 \leq j \leq q-1\}$

Alkiota $e^{i2\pi j/q}$ vastaa kuvaus g_j, $g_j(z) = e^{i2\pi j/q} z$.

$Gz = \{e^{i2\pi j/q} z \mid 0 \leq j \leq q-1\}\quad \forall z \in \mathbb{D}$
$G_z = \{g_0\} = \{id_{\mathbb{D}}\}\quad \forall z \in \mathbb{D} - \{0\}$
$G_0 = G$
Siis G toimii vapaasti joukossa $\mathbb{D} - \{0\}$, mutta ei kiekolla $\mathbb{D}$.

<u>Määritelmä 13.</u> Olkoon G ryhmän $Möb(\mathbb{H})$ aliryhmä. Sanomme, että ryhmä G toimii <u>vahvasti epäjatkuvasti</u> ylemmänä puolitasona $\mathbb{H}$, jos $\{g(z) \mid g \in G\}$ on lokaalisti äärellinen kaikilla $z \in \mathbb{H}$.