Hyperbolinen geometria

Harjoitus 9.

1) Olkoot $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$. Olkoon $\gamma \in \text{Möb}(\mathbb{H})$,

$$\gamma(z) = \frac{(1+pq)z - p^2}{q^2 z + (1-pq)} .$$

$p, q \in \mathbb{Z} \Rightarrow 1+pq, -p^2, q^2, 1-p\cdot q \in \mathbb{Z}$.

Koska $(1+pq)(1-pq) + p^2q^2 = 1 - p^2q^2 + p^2q^2 = 1$,

pätee $\gamma \in PSL(2;\mathbb{Z}) = \Gamma$.

Kuvauksen γ kiintopisteet:

$$\gamma(z) = z$$

$\Leftrightarrow (1+pq)z - p^2 = q^2z^2 + (1-pq)z$

$\Leftrightarrow q^2z^2 - 2pqz + p^2 = 0 \quad | : q^2 \neq 0$

$\Leftrightarrow z^2 - 2\frac{p}{q}z + \left(\frac{p}{q}\right)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \left(z - \frac{p}{q}\right)^2 = 0$

$\Leftrightarrow z = \frac{p}{q}$ Siis kuvauksella γ on yksi kiintopiste $z = \frac{p}{q} \in \partial\mathbb{H}$.

Lause 14.30 $\Rightarrow \frac{p}{q} \in \Lambda(\Gamma)$

p ja q mieli valtaisia $\Rightarrow \mathbb{Q} \subset \Lambda(\Gamma)$

Lause 14.26 $\Rightarrow \Lambda(\Gamma)$ on suljettu. Siis $\Lambda(\Gamma) = \partial\mathbb{H} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

2) Etsi sellaiset Fuchsin ryhmät Γ_j, että ryhmän Γ_j kasautumispisteitten joukossa on täsmälleen j alkiota kun $j = 0, 1, 2$ tai ∞.

i) Olkoon $\gamma \in \text{Möb}(\mathbb{H})$, $\gamma(z) = \frac{-1}{z}$.
Tällöin $\gamma(\gamma(z)) = z$, joten $\gamma = \gamma^{-1}$ ja $\Gamma_0 = \{id, \gamma\}$ on Fuchsin ryhmä.
Tarkastellaan pistettä i: $id(i) = i$

$$\gamma(i) = \frac{-1}{i} = i$$

Siis pisteen i rata on $\Gamma_0(i) = \{i\}$.
Radalla $\Gamma_0(i)$ ei ole kasautumispisteitä, joten $\Lambda(\Gamma_0) = \Lambda(\Gamma_0(i)) = \emptyset$.

ii) Olkoon $\Gamma_1 = \{z \mapsto z+n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.
Pisteen $z \in \mathbb{H}$ rata on

$$\Gamma_1(z) = \{z+n \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

Kun $n \to \infty$, niin $|z+n| \to \infty$
Samoin, kun $n \to \infty$, niin $|z+n| \to \infty$.
Siis ∞ on radan $\Gamma_1(z)$ kasautumispiste, eikä muita kasautumispisteitä ole. Niinpä $\Lambda(\Gamma_1) = \Lambda(\Gamma_1(z)) = \{\infty\}$.

iii) Olkoon $\Gamma_2 = \{z \mapsto 2^n z \mid n \in \mathbb{Z}\}$.
Olkoon $z \in \mathbb{H}$. Tällöin

$$\lim_{n \to \infty} |2^n z| = \infty \quad \text{ja} \quad \lim_{n \to \infty} |2^{-n} z| = 0.$$

Pisteen z rata on $\Gamma_2(z)$ ja radan kasautumispisteet ovat 0 ja ∞. Siis $\Lambda(\Gamma_2) = \Lambda(\Gamma_2(z)) = \{0, \infty\}$.

iv) Olkoon $\Gamma_\infty = PSL(2;\mathbb{Z})$. Tehtävän 1 perusteella $\Lambda(\Gamma_\infty) = \partial\mathbb{H}$, siis $\Lambda(\Gamma_\infty)$ on ääretön joukko.

3) Olkoon G ryhmä ja olkoon $x \in G$. Olkoon H ryhmän G aliryhmä.

i) <u>Väite:</u> $C_G(x) = \{ g \in G \mid gx = xg \}$ on ryhmän G aliryhmä.

<u>Tod.</u>

1) olkoon e ryhmän G neutraalialkio.
Tällöin $ex = x = xe$, joten $e \in C_G(x)$.

2) oletetaan, että $g \in C_G(x)$.
Tällöin $gx = xg$.
$\Rightarrow$ $x = (g^{-1}g)x = g^{-1}(gx) = g^{-1}(xg) = (g^{-1}x)g$
$\Rightarrow$ $xg^{-1} = [(g^{-1}x)g]g^{-1} = (g^{-1}x)(gg^{-1}) = g^{-1}x$.
$\Rightarrow$ $g^{-1} \in C_G(x)$.

3) oletetaan, että $g, h \in G_G(x)$.
Tällöin

$$ghx = g(hx) = g(xh) = (gx)h = (xg)h = xgh.$$

Siis $gh \in C_G(x)$. $\square$

ii) <u>Väite:</u> $N_G(H)$ on ryhmän G aliryhmä.

<u>Tod.</u> $N_G(H) = \{ g \in G \mid gHg^{-1} = H \}$

1) $eHe^{-1} = H$, joten $e \in N_G(H)$.

2) olkoon $g \in N_G(H)$. Tällöin

$$g^{-1}Hg = g^{-1}(gHg^{-1})g = (g^{-1}g)H(g^{-1}g) = eHe = H.$$

Siis $g^{-1} \in N_G(H)$

3) olkoot $g_1, g_2 \in N_G(H)$. Tällöin $(g_1g_2)H(g_1g_2)^{-1} = (g_1g_2)H(g_2^{-1}g_1^{-1})$
$= g_1(g_2Hg_2^{-1})g_1^{-1} = g_1Hg_1^{-1} = H$.

Siis $g_1g_2 \in N_G(H)$. $\square$

4) Olkoon h ylemmän puolitason Möbius-kuvaus, $h(z) = kz$, missä $k > 0$, $k \neq 1$.

Väite: $C_{\text{Möb}(\mathbb{H})}(h) = \{ g \in \text{Möb}(\mathbb{H}) \mid g(z) = \lambda z, \lambda > 0 \}$

Tod. Olkoon $g \in \text{Möb}(\mathbb{H})$. Oletetaan, että $g \in C_{\text{Möb}(\mathbb{H})}(h)$. Kirjoitetaan

$$g(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad \text{missä } ad - bc = 1.$$

Tällöin

$$hg(z) = \frac{kaz + kb}{cz+d} \quad \text{ja} \quad gh(z) = \frac{akz+b}{ckz+d}.$$

Koska $hg = gh$, pätee

$$\begin{pmatrix} ka & kb \\ c & d \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} ak & b \\ ck & d \end{pmatrix}$$

jollakin $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$.

Jos $a = 0$, niin $\begin{cases} kb = \alpha b & \mid \cdot c \\ c = \alpha c k & \mid \cdot b \\ -bc = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} kbc = \alpha bc \\ bc = \alpha k bc \\ -bc = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = \alpha \\ \alpha k = 1 \end{cases} \Rightarrow \alpha = k = 1$ Ristiriita, koska $k \neq 1$

Siis $a \neq 0$, joten $ka = \alpha ak \Rightarrow \alpha = 1$ $(k \neq 0)$.
Niinpä $\begin{cases} kb = b \\ c = ck \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$ (koska $k \neq 1$

Siis $g(z) = \frac{a}{d} z = \lambda z$ ja $\lambda = \frac{a}{d} > 0$ koska $ad - \underbrace{bc}_{=0} = 1$.

Selvästi $gh = hg$. $\square$

5) Olkoon γ Poincarén kiekon elliptinen Möbius-kuvaus, $\gamma(z) = e^{i2\pi\theta}z$, missä $\theta \in (0,1)$.

Väite: Kuvauksen γ keskittäjä on origon ympäri suoritettavien kiertojen muodostama ryhmä.

Tod. Kirjoitetaan $\varphi = 2\pi\theta$, joten $\gamma(z) = e^{i\varphi}z$.
Olkoon $g \in C_{\text{Möb}(\mathbb{D})}(\gamma)$. Kirjoitetaan

$$g(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\bar\beta z + \bar\alpha},$$

missä $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ja $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$. Tällöin

$$\gamma g(z) = \frac{e^{i\varphi}\alpha z + e^{i\varphi}\beta}{\bar\beta z + \bar\alpha}$$

ja

$$g\gamma(z) = \frac{\alpha e^{i\varphi} z + \beta}{\bar\beta e^{i\varphi} z + \bar\alpha}.$$

Siis $\begin{pmatrix} e^{i\varphi}\alpha & e^{i\varphi}\beta \\ \bar\beta & \bar\alpha \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} \alpha e^{i\varphi} & \beta \\ \bar\beta e^{i\varphi} & \bar\alpha \end{pmatrix}$, jollakin $c \in \mathbb{R}, c \neq 0$.

Koska $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$, pätee $\alpha \neq 0$.

Siis yhtälön $e^{i\varphi}\alpha = c\alpha e^{i\varphi}$ perusteella $c = 1$.

Näinpä $\underbrace{e^{i\varphi}}_{\neq 1}\beta = \beta$, joten $\beta = 0$.

Siis $g(z) = \frac{\alpha}{\bar\alpha} z$. Kirjoitetaan $\alpha = e^{it}$
($|\alpha| = 1$, koska $|\alpha|^2 - \underbrace{|\beta|^2}_{=0} = 1$)

Tällöin $g(z) = \frac{e^{it}}{e^{-it}} z = e^{i2t} z$,

joten g on kierto origon ympäri. □

(Huom. Selvästi $\gamma g = g\gamma$.)