Hyperbolinen geometria

Harjoitus 8.

1. X = topologinen avaruus
   G = ryhmä avaruuden X homeomorfismeja

a) Osoita, että avaruuden X pisteitten radat muodostavat avaruuden X osituksen.

Olkoon $\mathcal{U} = \{A_\alpha \mid \alpha \in I\}$ perhe avaruuden X osajoukkoja. Perhe $\mathcal{U}$ on avaruuden X ositus, jos seuraavat ehdot pätevät:

1) $A_\alpha \neq \emptyset \quad \forall \alpha \in I$
2) $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = X$
3) $A_\alpha \cap A_\beta \neq \emptyset \Rightarrow A_\alpha = A_\beta$

1) Selvästi $\forall x \in X$ rata $Gx \neq \emptyset$, koska $x \in Gx$.

2) $\forall x \in X$: $Gx \subset X$. Siis $\bigcup_{x \in X} Gx \subset X$.

Toisaalta $X = \bigcup_{x \in X} \{x\} \subset \bigcup_{x \in X} Gx$. $\therefore X = \bigcup_{x \in X} Gx$

3) Olkoot $x, y \in X$, oletetaan, että $Gx \cap Gy \neq \emptyset$.
$\Rightarrow \exists z \in Gx \cap Gy$
$\Rightarrow z = g_1 x = g_2 y$, joillakin $g_1, g_2 \in G$.
$\Rightarrow x = (g_1)^{-1} g_2 y$
$\Rightarrow Gx = \{gx \mid g \in G\} = \{g(g_1)^{-1} g_2 y \mid g \in G\}$
$= \{gy \mid g \in G\} = Gy$.

1, 2, 3 $\Rightarrow$ $\{Gx \mid x \in X\}$ on avaruuden X ositus.

1c) Olkoon $x \in X$ ja olkoon $g \in G$. Osoita, että pisteitten x ja gx isotropiaryhmille pätee $G_{gx} = gG_xg^{-1}$.

Tod.
$$
\begin{aligned}
h \in G_{gx} &\iff h(gx) = gx \\
&\iff (hg)x = gx \\
&\iff g^{-1}(hg)x = x \\
&\iff g^{-1}hg = g^{-1}(hg) \in G_x \\
&\iff h \in gG_xg^{-1}. \qquad \square
\end{aligned}
$$

2) Olkoon (X,d) metrinen avaruus ja olkoon $G = \{g_1, \dots, g_n\}$ ryhmä avaruuden X homeomorfismeja. Olkoon

$$\tilde{d} : X \times X \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} d(g_ix, g_iy)$$

a) Osoita, että $\tilde{d}$ on avaruuden X metriikka.

Tod.

1) $d(g_ix, g_iy) \geq 0 \quad \forall i \quad \Rightarrow \tilde{d}(x,y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} d(g_ix, g_iy) \geq 0 \quad \forall x,y \in X$
Edelleen,
$$
\begin{aligned}
\tilde{d}(x,y) = 0 &\iff d(g_ix, g_iy) = 0 \quad \forall i \\
&\iff g_ix = g_iy \quad \forall i \\
&\iff x = y
\end{aligned}
$$

2) Olkoot $x,y \in X$. Tällöin

$$\tilde{d}(x,y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} d(g_ix, g_iy) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{m} d(g_iy, g_ix) = \tilde{d}(x,y).$$

3) Olkoot $x,y,z \in X$. Tällöin

$$
\begin{aligned}
\tilde{d}(x,z) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} d(g_ix, g_iz) \\
&\leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (d(g_ix, g_iy) + d(g_iy, g_iz)) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} d(g_ix, g_iy) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} d(g_iy, g_iz) \\
&= \tilde{d}(x,y) + \tilde{d}(y,z). \qquad \square
\end{aligned}
$$

b) Kuvaus $g: X \to X$ on isometria metriikan $\tilde{d}$ suhteen, jos $\tilde{d}(g(x), g(y)) = \tilde{d}(x,y)$ kaikilla $x, y \in X$.

<u>Väite</u>: Kaikilla $i \in \{1, \dots, n\}$ kuvaus $g_i : X \to X$ on isometria metriikan $\tilde{d}$ suhteen.

<u>Tod.</u> Olkoot $x, y \in X$. Olkoon $g \in G = \{g_1, \dots, g_n\}$. Tällöin

$$\tilde{d}(gx, gy) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d(g_i g x, g_i g y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d(g_i x, g_i y)$$

$$= \tilde{d}(x,y),$$

koska $\{g_1 g, \dots, g_n g\} = G = \{g_1, \dots, g_n\}$. $\square$

3) $PSL(2;\mathbb{Z})$: Möbius-kuvaukset $\gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, missä $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ ja $ad - bc = 1$

a) Olkoon $q \in \mathbb{Q}$, $q \neq 0$. Kirjoitetaan $q = \frac{b}{d}$, missä $\operatorname{syt}\{b, d\} = 1$, $b, d \in \mathbb{Z}$.
Eukleideen algoritmi (Hakaperin)
$\Rightarrow \exists\, a, c \in \mathbb{Z}: \ ad - bc = 1$.
Olkoon $\gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Tällöin $\gamma(0) = \frac{b}{d}$.
Siis $q = \frac{b}{d}$ on pisteen 0 radalla.
Vielä, $0 = id(0)$ ja $\gamma'(0) = \infty$, missä $\gamma' \in PSL(2,\mathbb{Z})$, $\gamma'(z) = \frac{-1}{z} = \frac{0-1}{1 \cdot z - 0}$.
Siis pisteen 0 rata on $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$, joten rata ei ole diskreetti.

b) Olkoon $\gamma \in \Gamma_0$, missä $\Gamma = PSL(2;\mathbb{Z})$.
Kirjoitetaan $\gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, missä $ad - bc = 1$, $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Siis

$$\gamma(0) = \frac{b}{d} = 0, \quad \text{joten } b = 0.$$

Siis $ad = ad - 0 = ad - bc = 1$.
$\Rightarrow a = d = 1$ tai $a = d = -1$.

Siis kuvaus γ voidaan kirjoittaa joko

$$\gamma(z) = \frac{z}{cz+1} \quad \text{tai} \quad \gamma(z) = \frac{-z}{cz-1} = \frac{-z}{-(-c)z-1} = \frac{z}{-cz+1}.$$

Pisteen 0 isotropiaryhmä on

$$\Gamma_0 = \{ \gamma \in \Gamma \mid \gamma(z) = \frac{z}{cz+1},\ c \in \mathbb{Z} \},$$

joten Γ_0 on ääretön. $\square$

4. Olkoon Γ Fuchsin ryhmä, $\Gamma \subset \text{Möb}(\mathbb{H})$.
Olkoon $K \subset \mathbb{H}$, $K \neq \emptyset$. Oletetaan, että K on kompakti.

<u>Väite.</u> Joukko $\{ \gamma \in \Gamma \mid \gamma(K) \cap K \neq \emptyset \}$ on äärellinen.

<u>Tod.</u> Vastaoletus, oletetaan, että on kuvaukset $\gamma_n \in \Gamma$, $n \in \mathbb{N}$, missä $\gamma_n(K) \cap K \neq \emptyset$ ja $\gamma_n \neq \gamma_m$ kun $n \neq m$. Kaikilla $n \in \mathbb{N}$, on olemassa $x_n \in K$: $\gamma_n(x_n) \in K$. Koska K on kompakti, voidaan olettaa (siirtymällä tarvittaessa osajonoihin), että jono (x_n) suppenee kohti pistettä $x \in K$ ja jono $(\gamma_n(x_n))$ suppenee kohti pistettä $y \in K$.
Olkoon $\varepsilon > 0$. Tällöin on olemassa $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, joille

$$n \geq N_1 \Rightarrow d_{\mathbb{H}}(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$$

ja

$$n \geq N_2 \Rightarrow d_{\mathbb{H}}(\gamma_n(x_n), y) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Olkoon $n \geq \max\{N_1, N_2\}$. Tällöin

$$d_{\mathbb{H}}(\gamma_n(x), y) \overset{\Delta}{\leq} d_{\mathbb{H}}(\gamma_n(x), \gamma_n(x_n)) + d_{\mathbb{H}}(\gamma_n(x_n), y)$$

$$= d_{\mathbb{H}}(x, x_n) + d_{\mathbb{H}}(\gamma_n(x_n), y) \quad (\gamma_n \text{ isometria})$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Olkoon

$$C_\varepsilon(y) = \{z \in \mathbb{H} \mid d_{\mathbb{H}}(z, y) \leq \varepsilon\}.$$

Tällöin $C_\varepsilon(y)$ on kompakti ja kaikilla $n \geq \max\{N_1, N_2\}$ pätee $\gamma_n(x) \in C_\varepsilon(y)$. Siis joukko

$$\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(x) \in C_\varepsilon(y)\}$$

on ääretön, mistä seuraa, että Γ ei toimi vahvasti epäjatkuvasti ylemmässä puolitasossa. Päädymme ristiriitaan, koska Γ on Fuchsin ryhmä ja Teoreeman 14.10 perusteella Fuchsin ryhmät toimivat vahvasti epäjatkuvasti ylemmässä puolitasossa. Siis vastaoletus on väärä ja joukko

$$\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(K) \cap K \neq \emptyset\}$$

on äärellinen. $\square$

5) <u>Väite</u>: Jokainen Fuchsin ryhmä Γ on numeroituva.

<u>Tod 1.</u> Topologisten ryhmien avulla väite voidaan todistaa seuraavasti. Euklidisella avaruudella $\mathbb{R}^4$ on numeroituva (topologian) kanta. Samasti myös 2×2-matriisien joukon avaruuden $\mathbb{R}^4$ kanssa. Siis $SL(2;\mathbb{R})$ on avaruuden $\mathbb{R}^4$ osajoukko, joten myös sen topologialla on numeroituva kanta. Annoimme ryhmälle $PSL(2;\mathbb{R}) = SL(2;\mathbb{R})/Z$, missä $Z = \left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\right\}$, tekijätopo-

logian. Sekijätopologialla varustettuna myös ryhmän $PSL(2;\mathbb{R})$ topologialla on numeroituva kanta (tarkista!). Topologisoimme ryhmän $\text{Möb}(\mathbb{H})$ (ja $\text{Möb}(\mathbb{D})$) vaatimalla, että isomorfismi $PSL(2;\mathbb{R}) \to \text{Möb}(\mathbb{H})$ on homeomorfismi. Niinpä myös ryhmän $\text{Möb}(\mathbb{H})$ topologialla on numeroituva kanta. Tästä seuraa, että jokainen ryhmän $\text{Möb}(\mathbb{H})$ diskreetti osajoukko on numeroituva. Erityisesti Fuchsin ryhmät ovat numeroituvia. □

<u>Tod. 2.</u> Väitteen voi todistaa myös seuraavasti:

Olkoon $x \in \mathbb{H}$. Tällöin rata Γx on diskreetti. Koska ylemmän puolitason topologialla on numeroituva kanta, on rata Γx numeroituva. Käytetään joukon A mahtavuudelle merkintää $\#(A)$. Tällöin

$$\#(\Gamma) = \#(\Gamma/\Gamma_x \times \Gamma_x) \quad (\Gamma_x = \text{pisteen } x \text{ isotropiaryhmä})$$

$$= \#(\underbrace{\Gamma x}_{\text{numeroituva}} \times \underbrace{\Gamma_x}_{\text{äärellinen}}) \quad (\text{Harj 7: } \exists \text{ bijektio } \Gamma x \to \Gamma/\Gamma_x)$$

$\Rightarrow \Gamma$ on numeroituva. □