Hyperbolinen Geometria

Harjoitus 7.

1) Osoita, että kaikilla $q \in \mathbb{N}$,

$$\Gamma_q = \left\{ \gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d} \;\middle|\; a,b,c,d \in \mathbb{Z},\ ad-bc=1,\ b \text{ ja } c \text{ ovat jaollisia luvulla } q \right\}$$

on ryhmän Möb($\mathbb{H}$) aliryhmä.

a) $id(z) = z = \frac{1 \cdot z + 0}{0 \cdot z + 1}$, $1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$ 0 on jaollinen q:lla

$\Rightarrow id \in \Gamma_q$

b) $\frac{az+b}{cz+d} = w \iff az+b = cwz+dw$
$\iff (a-cw)z = dw-b$
$\iff z = \frac{dw-b}{-cw+a}$

Kuvauksen $\gamma: \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$,
käänteiskuvaus on

$\gamma^{-1}: \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, $z \mapsto \frac{dz-b}{-cz+a}$,

$da - (-b)(-c) = ad - bc = 1$

b ja c ovat jaollisia q:lla $\Rightarrow -b$ ja $-c$ ovat jaollisia q:lla

Siis $\gamma \in \Gamma_q \Rightarrow \gamma^{-1} \in \Gamma_q$

c) Olkoot $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma_q$,

$\gamma_1(z) = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}$ ja $\gamma_2(z) = \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}}_{A_2} \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}}_{A_1} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_2a_1 + b_2c_1 & a_2b_1 + b_2d_1 \\ c_2a_1 + d_2c_1 & c_2b_1 + d_2d_1 \end{pmatrix}}_{A_2A_1}$$

$(\gamma_2\gamma_1)(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, missä $a = a_2a_1 + b_2c_1$, $b = a_2b_1 + b_2d_1$
$c = c_2a_1 + d_2c_1$, $d = c_2b_1 + d_2d_1$

Selvästi $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

$ad - bc = \det(A_2 A_1) = \det A_2 \det A_1 = 1 \cdot 1 = 1$

$b = a_2 b_1 + b_2 d_1$ on jaollinen q:lla, koska b_1 ja b_2 ovat jaollisia q:lla

$c = c_2 a_1 + d_2 c_1$ on jaollinen q:lla, koska c_1 ja c_2 ovat jaollisia q:lla

Siis $\gamma_2 \gamma_1 \in \Gamma_q$.

a, b, c $\Rightarrow$ Γ_q on ryhmä.

2) Olkoon X topologinen avaruus ja olkoon G ryhmä avaruuden X homeomorfismeja. Olkoon $x \in X$.

a) Väite: Isotropiaryhmä $G_x = \{g \in G \mid g(x) = x\}$ on ryhmän G aliryhmä.

Tod. Ryhmän G neutraalialkio on identtinen kuvaus $id: X \to X$. Koska $id(x) = x$, pätee $id \in G_x$.

Oletetaan, että $g \in G_x$. Siis $g(x) = x$. Tällöin $x = g^{-1}(g(x)) = g^{-1}(x)$. Siis $g^{-1} \in G_x$.

Oletetaan, että $g, h \in G_x$. Tällöin $(gh)(x) = g(h(x)) = g(x) = x$. Siis $gh \in G_x$. $\square$

b) Väite: On olemassa bijektio $Gx \to G/G_x$, missä Gx on pisteen x rata $\{g(x) \mid g \in G\}$.

Tod. Olkoon $f: Gx \to G/G_x$, $gx \mapsto gG_x$.

Olkoon $gx = hx$, missä $g, h \in G$.

$\Rightarrow h^{-1}gx = x$

$\Rightarrow h^{-1}g \in G_x$

$\Rightarrow gG_x = hG_x$ Siis f on hyvin määritelty.

Olkoon $f(gx) = f(hx)$.

$\Rightarrow gG_x = hG_x$

$\Rightarrow h^{-1}gG_x = G_x$

$\Rightarrow h^{-1}g \in G_x$

$\Rightarrow h^{-1}gx = x$

$\Rightarrow gx = hx$ Siis f on injektio.

Olkoon $gG_x \in G/G_x$. Tällöin $f(gx) = gG_x$. Siis f on surjektio.

$\square$

3) Olkoon $k>0$, $k \neq 1$. Olkoon Γ ryhmä, jonka virittävät kuvaukset $\gamma_1(z) = z+1$ ja $\gamma_2(z) = kz$.

<u>Väite:</u> Γ ei ole Fuchsin ryhmä.

<u>Tod.</u> Kuvauksen γ_2 käänteiskuvaus on kuvaus

$$\gamma_2^{-1}: \mathbb{H} \to \mathbb{H},\ z \mapsto \frac{1}{k}z.$$

Käytetään merkintää γ_2^n yhdistetylle kuvaukselle $(\underbrace{\gamma_2 \circ \cdots \circ \gamma_2}_{n})$. Tällöin

$$\gamma_2^n: \mathbb{H} \to \mathbb{H},\ z \mapsto k^n z.$$

Koska Γ on ryhmä, kuvaus $\overbrace{\gamma_2^{-n}}^{=(\gamma_2^{-1})^n}\gamma_1\gamma_2^n \in \Gamma$.

Kuvaukselle $\gamma_2^{-n}\gamma_1\gamma_2^n$ pätee

$$\begin{aligned}(\gamma_2^{-n}\gamma_1\gamma_2^n)(z) = (\gamma_2^{-n}\gamma_1)(k^n z) &= \gamma_2^{-n}(k^n z+1) \\ &= \frac{1}{k^n}(k^n z+1) \\ &= z + \frac{1}{k^n}.\end{aligned}$$

Normalisoidussa muodossa kirjoitettuna kuvaus $\gamma_2^{-n}\gamma_1\gamma_2^n$ on:

$$(\gamma_2^{-n}\gamma_1\gamma_2^n)(z) = \frac{z+\frac{1}{k^n}}{0\cdot z+1}$$

Siis sitä vastaa matriisi $\begin{pmatrix} 1 & 1/k^n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

Raja-arvo $\lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} 1 & 1/k^n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, jos $k > 1$,

Siis $id \in \Gamma$ ei ole erakkopiste, joten Γ ei ole diskreetti ryhmä kun $k > 1$.

Olkoon $k < 1$: Kuvaus $\gamma_2^n \gamma_1 \gamma_2^{-n} \in \Gamma$ ja

$$(\gamma_2^n \gamma_1 \gamma_2^{-n})(z) = (\gamma_2^n \gamma_1)(k^{-n} z) = \gamma_2^n (k^{-n} z + 1)$$
$$= k^n (k^{-n} z + 1)$$
$$= (z + k^n)$$

Tätä kuvausta vastaa matriisi $\begin{pmatrix} 1 & k^n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} 1 & k^n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Jälleen $id \in \Gamma$ ei voi olla erakkopiste, joten Γ ei voi olla diskreetti.

Siis Γ ei voi olla Fuchsin ryhmä. $\square$

4) Olkoon $\Gamma = \{ \gamma_{n,m} \mid \gamma_{n,m}(x,y) = (x+n, y+m), n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z} \}$ ryhmä tason $\mathbb{R}^2$ isometrioita. Määritä $\Gamma(0,0)$ ja $\Gamma_{(0,0)}$.

Pisteen $(0,0)$ rata: $\gamma_{n,m}(0,0) = (n,m)$

Siis $\Gamma(0,0) = \{ (n,m) \mid n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z} \}$

Pisteen $(0,0)$ isotropiaryhmä: $\gamma_{n,m}(0,0) = (n,m) = (0,0)$
$\Leftrightarrow n = 0$ ja $m = 0$.

Siis $\Gamma_{(0,0)} = \{ \gamma_{0,0} \} = \{ id_{\mathbb{R}^2} \}$.

5) Olkoon $G = \text{Möb}(\mathbb{H})$. Määritä pisteen i rata Gi ylempänä puolitasossa ja sen isotropiaryhmä G_i.

Aiemmin todistettiin (esim. Lemma 5.9), että $\forall z_0 \in \mathbb{H}$ $\exists \gamma \in \text{Möb}(\mathbb{H}) : \gamma(z_0) = i$. Tällöin $\gamma^{-1} \in \text{Möb}(\mathbb{H})$ ja $\gamma^{-1}(i) = z_0$. Siis $z_0 \in Gi$, joten $Gi = \mathbb{H}$.

Olkoon $\gamma \in G_i$. Kirjoitetaan

$$\gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad a,b,c,d \in \mathbb{R}, \quad ad-bc = 1.$$

Tällöin $\gamma(i) = i \iff \dfrac{ai+b}{ci+d} = i$

$$\iff ai + b = -c + di$$

$$\iff \begin{cases} a = d \\ b = -c \end{cases}$$

Siis: $ad - bc = 1 \iff a^2 + b^2 = 1$

Valitaan $\theta \in [0,1]$: $a = \cos 2\pi\theta$, $b = \sin 2\pi\theta$.

Tällöin $\gamma(z) = \dfrac{\cos(2\pi\theta) z + \sin(2\pi\theta)}{-\sin(2\pi\theta) z + \cos(2\pi\theta)}$.

Siis $G_i = \left\{ \gamma \in G \;\middle|\; \gamma(z) = \dfrac{\cos(2\pi\theta)z + \sin(2\pi\theta)}{-\sin(2\pi\theta)z + \cos(2\pi\theta)}, \ \theta \in [0,1] \right\}$.