Hyperbolinen geometria

Harjoitus 6:

1) i) $\gamma_1(z) = \frac{3z+1}{-z}$

$$\gamma_1(z) = z \iff 3z+1 = -z^2$$
$$\iff z^2+3z+1=0$$
$$\iff (z+\tfrac{3}{2})^2 = -1+\tfrac{9}{4} = \tfrac{5}{4}$$
$$\iff z = -\tfrac{3}{2} \pm \tfrac{\sqrt{5}}{2}$$

kiintopisteet $\frac{-3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$ ja $\frac{-3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$ $\Rightarrow$ γ_1 on hyperbolinen

$\gamma_1(z) = \frac{3z+1}{-z+0}$ $\quad 3\cdot 0 - 1\cdot(-1) = 1$ $\Rightarrow$ γ on normalisoitu

γ_1:n jälki on $(3+0)^2 = 9$

ii) $\gamma_2(z) = \frac{z+1}{2}$ $\Rightarrow$ $\gamma(\infty) = \infty$, joten ∞ on kiintopiste

$\frac{z+1}{2} = z \iff z+1 = 2z \iff z = 1$, toinen kiintopiste 1

$\Rightarrow$ γ_2 on hyperbolinen

$1\cdot 2 - 1\cdot 0 = 2$ $\Rightarrow$ normalisoidussa muodossa

$$\gamma_2(z) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}z + \frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{2}{\sqrt{2}}}$$

γ_2:n jälki on $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{9}{2}$

iii) $\gamma_3(z) = \frac{z+1}{-z+1} = z$

$\iff z+1 = -z^2+z$ $\quad$ kiintopiste $i \in \mathbb{H}$ $\Rightarrow$ γ_3 on elliptinen

$\iff z^2 = -1$

$\iff z = \pm i$

$1\cdot 1 - 1\cdot(-1) = 2 \Rightarrow$ normalisoidussa muodossa

$$\gamma_3(z) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} z + \frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{-1}{\sqrt{2}} z + \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

γ_3:in jälki on $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{4}{2} = 2$

iv) $\gamma_4(z) = \frac{3z-4}{z-1} = z$ $\quad$ $3\cdot(-1) - (-4)\cdot 1 = -3+4 = 1 \Rightarrow \gamma_4$ on normalisoitu

$\Leftrightarrow 3z - 4 = z^2 - z$

$\Leftrightarrow z^2 - 4z + 4 = 0$

$\Leftrightarrow (z-2)^2 = 0$ $\quad$ kiintopiste $2 \in \partial\mathbb{H} \Rightarrow \gamma_4$ on parabolinen

γ_4:n jälki on $(3-1)^2 = 4$

2) a) $\gamma_1(z) = \frac{2i\bar{z} - i}{3i\bar{z} - 2i} = \frac{2\bar{z} - 1}{3\bar{z} - 2} = z$

$\Leftrightarrow 2\bar{z} - 1 = 3z\bar{z} - 2z$ $\quad$ kirj. $z = x+iy$, $\bar{z} = x - iy$

$\Leftrightarrow 2(x-iy) - 1 = 3(x^2+y^2) - 2(x+iy)$

$\Leftrightarrow 3(x^2+y^2) - 4x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{3} = 0$

$\Leftrightarrow (x - \frac{2}{3})^2 + y^2 = -\frac{1}{3} + \frac{4}{9} = \frac{-3+4}{9} = \frac{1}{9}$

kiintopisteitä ovat täsmälleen kaikki euklidisen ympyrän $(x-\frac{2}{3})^2 + y^2 = \frac{1}{9}$ pisteet. Siis $\{z \in \mathbb{H} \cup \partial\mathbb{H} \mid |z - \frac{2}{3}| = \frac{1}{3}\}$

b) $\gamma_2(z) = \frac{i\bar{z} + 2i}{i\bar{z} + i} = \frac{\bar{z} + 2}{\bar{z} + 1} = z$

$\Leftrightarrow \bar{z} + 2 = z\bar{z} + z$ $\quad$ kirj $z = x+iy$, $\bar{z} = x - iy$

$\Leftrightarrow z\bar{z} + z - \bar{z} - 2 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + i2y - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ 2y = 0 \end{cases} \qquad \text{kiintopisteet } \sqrt{2} \text{ ja } -\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

3) a) $\gamma_1, \gamma_2 \in$ Möb(ℍ)
Määr. $\gamma_1 \sim \gamma_2$ jos ja vain jos $\exists g \in$ Möb(ℍ) : $\gamma_2 = g^{-1}\gamma_1 g$.

(i) $\gamma = id_{\mathbb{H}}^{-1} \gamma \, id_{\mathbb{H}}$, missä $id_{\mathbb{H}} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ on identtinen kuvaus. Siis $\gamma \sim \gamma$ $\forall \gamma \in$ Möb(ℍ).

(ii) Olkoon $\gamma_1 \sim \gamma_2$. Tällöin $\exists g \in$ Möb(ℍ) : $\gamma_2 = g^{-1}\gamma_1 g$.
Siis $\gamma_1 = g\gamma_2 g^{-1} = (g^{-1})^{-1}\gamma_2 g^{-1}$, missä $g^{-1} \in$ Möb(ℍ).
$\Rightarrow$ $\gamma_2 \sim \gamma_1$.

(iii) Olkoot $\gamma_1 \sim \gamma_2$ ja $\gamma_2 \sim \gamma_3$.
$\Rightarrow \exists g, h \in$ Möb(ℍ) : $\gamma_2 = g^{-1}\gamma_1 g$ ja $\gamma_3 = h^{-1}\gamma_2 h$.
$\Rightarrow \gamma_3 = h^{-1}(g^{-1}\gamma_1 g)h = h^{-1}g^{-1}\gamma_1 gh = (gh)^{-1}\gamma_1(gh)$
$\Rightarrow \gamma_1 \sim \gamma_3$

$\therefore$ $\sim$ on ekvivalenssirelaatio

b) Olkoot $\gamma_1, \gamma_2 \in$ Möb(ℍ).
Olkoon $g \in$ Möb(ℍ) : $\gamma_2 = g^{-1}\gamma_1 g$.

<u>Väite:</u> $\mathrm{tr}(\gamma_1) = \mathrm{tr}(\gamma_2)$

<u>Tod.</u> $n \times n$-Matriisin jälki on sen lävistäjäalkioitten summa. Olkoot A ja B $n \times n$-matriiseja. Tällöin

$$\mathrm{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n}(AB)_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{ji}a_{ij}$$
$$= \sum_{j=1}^{n}(BA)_{jj} = \mathrm{tr}(BA),$$

missä $A = (a_{ij})$ ja $B = (b_{ij})$.

Olkoot $\gamma_1(z) = \dfrac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}$, $a_1, b_1, c_1, d_1 \in \mathbb{R}$, $a_1 d_1 - b_1 c_1 = 1$

ja $\gamma_2(z) = \dfrac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}$, $a_2, b_2, c_2, d_2 \in \mathbb{R}$, $a_2 d_2 - b_2 c_2 = 1$.

Olkoot $A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ ja $A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$.

Olkoon g:n matriisi A. Tällöin $A_2 = A^{-1} A_1 A$ tai $A_2 = -A^{-1} A_1 A$. Siis

$$tr(A_2) = tr(\pm A^{-1} A_1 A) = \pm\, tr(A^{-1} A_1 A)$$

$$= \pm\, tr(A_1 A^{-1} A) = \pm\, tr(A_1).$$

Niinpä $tr(\gamma_2) = [tr(A_2)]^2 = [\pm\, tr(A_1)]^2 = tr(\gamma_1)$. $\square$

c) Olkoot γ_1, γ_2 ja g kuten kohdassa b.
Tällöin

γ_1 on hyperbolinen $\Leftrightarrow tr(\gamma_1) \in (4, \infty)$
$\Leftrightarrow tr(\gamma_2) \in (4, \infty)$
$\Leftrightarrow \gamma_2$ on hyperbolinen

γ_1 on elliptinen $\Leftrightarrow tr(\gamma_1) \in [0, 4)$
$\Leftrightarrow tr(\gamma_2) \in [0, 4)$
$\Leftrightarrow \gamma_2$ on elliptinen

γ_1 on parabolinen $\Leftrightarrow tr(\gamma_1) = 4$
$\Leftrightarrow tr(\gamma_2) = 4$
$\Leftrightarrow \gamma_2$ on parabolinen

4) Olkoon $\gamma(z) = z + k$, missä $k > 0$ ja olkoon $\gamma_1(z) = z + 1$. Piste ∞ on sekä kuvauksen γ että kuvauksen γ_1 kiintopiste. Etsitään $g \in Möb(\mathbb{H})$, jolle $g^{-1}\gamma g = \gamma_1$ ja $g(\infty) = \infty$. Kokeillaan: $g(z) = kz$, $k > 0$, ja etsitään sopiva k. Nyt

$$g^{-1}\gamma g(z) = g^{-1}\gamma(kz) = g^{-1}(kz + k) = \frac{1}{k}(kz + k) = z + \frac{k}{k}$$

Valitaan $k = k \Rightarrow g^{-1}\gamma g = \gamma_1$.

Olkoon sitten $\gamma(z) = z - b$, missä $b > 0$ ja olkoon $\gamma_2(z) = z - 1$. Olkoon taas $g(z) = kz$, missä $k > 0$. Tällöin

$$g^{-1}\gamma g(z) = g^{-1}\gamma(kz) = g^{-1}(kz - b) = \frac{1}{k}(kz - b) = z - \frac{b}{k}.$$

Valitaan taas $k = b \Rightarrow g^{-1}\gamma g = \gamma_2$.

Oletetaan, että $\gamma_1(z) = z + 1$ ja $\gamma_2(z) = z - 1$ ovat konjugaatteja. Tällöin on olemassa $g \in \text{Möb}(\mathbb{H})$, $\gamma_1 g = g \gamma_2$,

$$g(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc = 1.$$

Kuvaukset γ_1 ja γ_2 voidaan kirjoittaa seuraavasti:

$$\gamma_1(z) = \frac{z+1}{0 \cdot z + 1}, \quad \gamma_2(z) = \frac{z-1}{0 \cdot z + 1}.$$

Matriisien avulla kirjoitettuna $\gamma_1 g = g \gamma_2$ on

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

eli

$$\begin{pmatrix} a + c & b + d \\ c & d \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} a & -a + b \\ c & -c + d \end{pmatrix}.$$

Tällöin
$$\begin{cases} a + c = a & \Rightarrow c = 0 \\ c = c & \\ b + d = -a + b & \Rightarrow d = -a \\ d = -c + d & \end{cases}$$
Siis $ad - bc = -a^2 < 0$ RISTIRIITA

tai
$$\begin{cases} a + c = -a & \\ c = -c & \Rightarrow c = 0 \\ b + d = a - b & \\ d = c - d & \Rightarrow d = 0 \end{cases}$$
Siis $ad - bc = 0$ RISTIRIITA

Niinpä γ_1 ja γ_2 eivät voi olla konjugaatteja. □

5) Olkoot $\gamma_1(z) = k_1 z$ ja $\gamma_2(z) = k_2 z$, missä $k_1, k_2 > 0$; $k_1 \neq 1$ ja $k_2 \neq 1$. Oletetaan, että γ_1 ja γ_2 ovat toistensa konjugaatteja. Tällöin on olemassa $g \in \text{Möb}(\mathbb{H})$, jolle $g\gamma_1 = \gamma_2 g$. Olkoon

$$g(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad a,b,c,d \in \mathbb{R}, \quad ad-bc > 0.$$

Siis $$g(\gamma_1(z)) = \frac{ak_1 z + b}{ck_1 z + d}$$

ja
$$\gamma_2(g(z)) = k_2 \frac{az+b}{cz+d},$$

joten
$$\frac{ak_1 z + b}{ck_1 z + d} = k_2 \frac{az+b}{cz+d}.$$

$$\Rightarrow \quad ack_1 z^2 + adk_1 z + bcz + bd = ack_1k_2 z^2 + bck_1k_2 z + adk_2 z + bdk_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ack_1 = ack_1k_2 & (1) \\ adk_1 + bc = bck_1k_2 + adk_2 & (2) \\ bd = bdk_2 & (3) \end{cases}$$

$k_2 \neq 0 \overset{3}{\Rightarrow} bd = 0$

Tapaus 1: $b = 0$: $2 \Rightarrow adk_1 = adk_2$
$\Rightarrow$ joko $ad = 0$ tai $k_1 = k_2$
jos $ad = 0$, niin $ad - bc = 0$, joten $g \notin \text{Möb}(\mathbb{H})$.
Siis $k_1 = k_2$

Tapaus 2: $d = 0$: $2 \Rightarrow bc = bck_1k_2$
$\Rightarrow$ joko $bc = 0$ tai $k_1k_2 = 1$
jos $bc = 0$, niin $ad - bc = 0$, joten $g \notin \text{Möb}(\mathbb{H})$.
Siis $k_1k_2 = 1$ eli $k_1 = 1/k_2$. $\square$

Jos $\gamma_1(z) = kz$ ja $\gamma_2 = \frac{1}{k} z$, niin $\gamma_1 = \gamma \circ \gamma_2 \circ \gamma^{-1}$, missä $\gamma(z) = \frac{\sqrt{k}}{z}$. (eli $\gamma \in \text{Möb}(\mathbb{H})$)