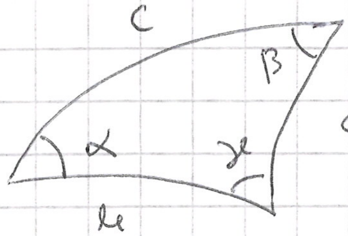
Harjoitus 5, ratkaisuja

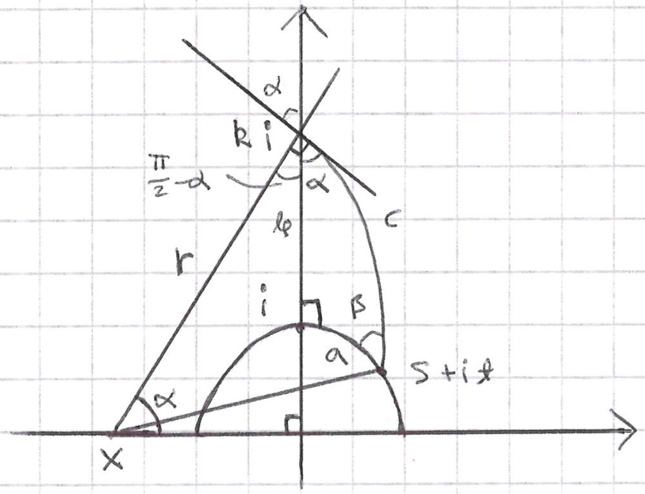
1.



Δ, $a, b, c < \infty$, $\gamma = \frac{\pi}{2}$

osoita, että $\tan\alpha = \dfrac{\tanh a}{\sinh b}$

Riittää osoittaa, tapaus $\Delta \subset \mathbb{H}$. Tapaus $\Delta \subset \mathbb{D}$ seuraa sitten käyttämällä kuvausta $h^{-1}: \mathbb{D} \to \mathbb{H}$ kuten tavallista. Soveltamalla Möbius-kuvausta kolmioon Δ, voidaan olettaa, että sen kärjet ovat pisteissä i, ki $(k>0)$ ja $s+it$, missä $s^2+t^2=1$. Voidaan myös olettaa, että kärkeä i vastaava kulma on $\frac{\pi}{2}$.



Olkoon C_0 geodeesi (puoli-ympyrä), joka yhdistää pisteet ki ja $s+it$. Olkoon x C_0:n keskipiste. Puoliympyrän C_0 säde on r, missä $r^2 = x^2 + k^2$. (euklidinen)

Siis
$$r^2 = k^2 + x^2 = (s+|x|)^2 + t^2$$
$$= s^2 + x^2 + 2s|x| + t^2$$
$$= x^2 + 2s|x| + 1, \text{ koska } s^2+t^2=1.$$

Siis $k^2 = 2s|x| + 1 \Rightarrow |x| = \dfrac{k^2-1}{2s}$

Huom.: Kuvaan merkitty kulma on $\frac{\pi}{2} - \alpha$, koska ympyrän säde on kohtisuorassa ympyrää vastaan.

Kuvasta nähdään: $\tan\alpha = \dfrac{k}{|x|} = \dfrac{2sk}{k^2-1}$.

Kaikilla $z, w \in \mathbb{H}$ pätee

$$\cosh d_{\mathbb{H}}(z,w) = 1 + \frac{|z-w|^2}{2\,\mathrm{Im}\,z\,\mathrm{Im}\,w}. \quad (*)$$

Soveltamalla kaavaa (*) kolmion Δ sivuihin saadaan:

$$\cosh a = \cosh d_H(i, s+it) = 1 + \frac{|s+i(t-1)|^2}{2t}$$

$$= 1 + \frac{s^2+(t-1)^2}{2t} = \frac{2t + \overbrace{s^2+t^2}^{=1} - 2t + 1}{2t}$$

$$= \frac{1}{t}$$

$$\cosh b = \cosh d_H(i, ki) = 1 + \frac{(k-1)^2}{2k} = \frac{2k+k^2-2k+1}{2k} = \frac{1+k^2}{2k}$$

$$\cosh c = \cosh d_H(ki, s+it) = 1 + \frac{|s+i(t-k)|^2}{2tk}$$

$$= 1 + \frac{\overbrace{s^2+t^2}^{1}+k^2-2tk}{2tk}$$

$$= \frac{1+k^2}{2tk}.$$

$$\cosh^2 b - \sinh^2 b = 1 \Rightarrow \sinh b = \pm\sqrt{\cosh^2 b - 1} = \sqrt{\left(\frac{1+k^2}{2k}\right)^2 - 1}$$

$$= \sqrt{\frac{1+k^4+2k^2-4k^2}{4k^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1-k^2)^2}{4k^2}} = \frac{k^2-1}{2k}$$

$$\tanh a = \frac{\sinh a}{\cosh a} = \frac{\sqrt{\cosh^2 a - 1}}{\cosh a} = \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2 - 1}}{1/t}$$

$$= t\sqrt{\frac{1}{t^2}-1} = t\sqrt{\frac{1-t^2}{t^2}} = t\,\frac{\sqrt{s^2}}{t} = s.$$

Siis $\tan \alpha = \dfrac{2sk}{k^2-1} = \dfrac{s}{\frac{k^2-1}{2k}} = \dfrac{\tanh a}{\sinh b}.$ $\square$

2. Olkoon Δ kuten tehtävässä 1.

a) Osoita, että $\cos\alpha = \dfrac{\tanh b}{\tanh c}$.

__Todistus:__ $1+\tan^2\alpha = 1+\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \dfrac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

$$\Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{1+\tan^2\alpha}$$

Siis: $\cos^2\alpha = \dfrac{1}{1+\tan^2\alpha} \overset{!}{=} \dfrac{1}{1+\dfrac{\tanh^2 a}{\sinh^2 b}} = \dfrac{\sinh^2 b}{\sinh^2 b+\tanh^2 a}$

Pyth.

$$= \frac{\sinh^2 b}{\sinh^2 b+\dfrac{\sinh^2 a}{\cosh^2 a}} \quad \cosh^2 a \leftarrow \frac{\cosh^2 c}{\cosh^2 b} \qquad = \frac{\sinh^2 b}{\sinh^2 b+\dfrac{(\cosh^2 a-1)}{\cosh^2 c}(1+\sinh^2 b)}$$

$$= \frac{\sinh^2 b}{\sinh^2 b+\dfrac{(1+\sinh^2 b)}{\cosh^2 c}\left(\dfrac{\cosh^2 c}{\cosh^2 b}-1\right)}$$

$$= \frac{\sinh^2 b}{\sinh^2 b+\cosh^2 b\left(\dfrac{1}{\cosh^2 b}-\dfrac{1}{\cosh^2 c}\right)} = \frac{\sinh^2 b}{\sinh^2 b+\left(1-\dfrac{\cosh^2 b}{\cosh^2 c}\right)}$$

$$= \frac{\sinh^2 b/\cosh^2 b}{\underbrace{\dfrac{\sinh^2 b}{\cosh^2 b}+\left(\dfrac{1}{\cosh^2 b}-\dfrac{1}{\cosh^2 c}\right)}_{\tanh^2 b+(1-\tanh^2 b)-(1-\tanh^2 c)}} = \frac{\tanh^2 b}{\tanh^2 c}.$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{\tanh b}{\tanh c} \qquad (\cos\alpha > 0 \text{ koska } 0<\alpha<\tfrac{\pi}{2}).$$

b) $\tan\alpha = \dfrac{\tanh a}{\sinh b}$ $\qquad \cos\alpha = \dfrac{\tanh b}{\tanh c}$

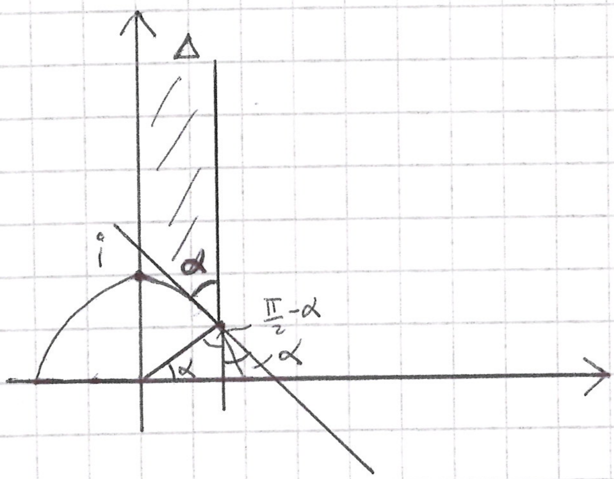
$$\Rightarrow \sin\alpha = \tan\alpha\cdot\cos\alpha = \frac{\tanh a}{\sinh b}\cdot\frac{\tanh b}{\tanh c} = \frac{\tanh a}{\cosh b\tanh c}$$

$$= \frac{\tanh a\cdot\cosh a}{\underbrace{\cosh a\cosh b}_{\cosh c}\tanh c} = \frac{\sinh a}{\sinh c}.$$

3. Olkoon Δ hyperbolinen kolmio, jonka kulmat ovat α, $\beta = 0$ ja $\frac{\pi}{2}$. Olkoon a = kolmion ainoan äärellisen pituisen sivun pituus.

<u>Väite:</u> $\sin\alpha = \frac{1}{\cosh a}$

<u>Todistus:</u> Voimme olettaa, että kolmion Δ reunakulma on pisteessä ∞ ja että kulmaa $\frac{\pi}{2}$ vastaava kärki on pisteenä i. Tällöin kolmion Δ kolmas kärki on pisteenä $\cos\alpha + i\sin\alpha$.



$$\cosh d_{\mathbb{H}}(z,w) = 1 + \frac{|z-w|^2}{2\,\mathrm{Im}z\,\mathrm{Im}w}$$

$z = i$, $w = \cos\alpha + i\sin\alpha$

$d_{\mathbb{H}}(z,w) = a$

$$\cosh a = 1 + \frac{|i - \cos\alpha - i\sin\alpha|^2}{2\cdot 1\cdot \sin\alpha}$$

$$= 1 + \frac{(1-\sin\alpha)^2 + \cos^2\alpha}{2\sin\alpha} = 1 + \frac{1+\sin^2\alpha - 2\sin\alpha + \cos^2\alpha}{2\sin\alpha}$$

$$= \frac{2}{2\sin\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha}. \quad \square$$

4. Olkoon Δ kuten tehtävässä 3.

Tällöin $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \left(1 - \frac{1}{\cosh^2 a}\right)^{1/2} = \left(\frac{\cosh^2 a - 1}{\cosh^2 a}\right)^{1/2}$

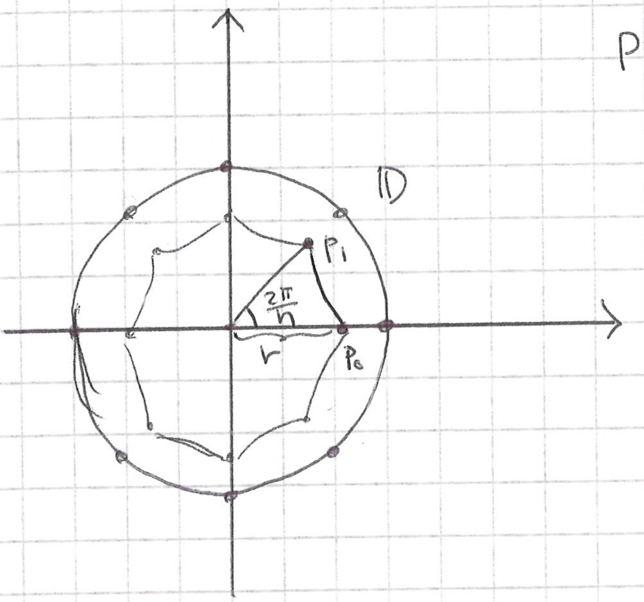
$$= \left(\frac{\sinh^2 a}{\cosh^2 a}\right)^{1/2} = \tanh a = \frac{1}{\coth a},$$

ja $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{\cosh a}\cdot\frac{\cosh a}{\sinh a} = \frac{1}{\sinh a}.$

$\square$

5. $P_n(r)$: Poincarén kiekon säännöllinen hyperbolinen monikulmio, kärjet pisteissä $p_k = e^{i\frac{2\pi k}{n}}$, $k \in \{0, \dots, n-1\}$.

Lasketaan monikulmion $P_n(r)$ sivun hyperbolinen pituus:



$$p_0 = r \Rightarrow l_0 = d_{\mathbb{D}}(0, p_0) = \ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right)$$

$$\Rightarrow r = \tanh\left(\tfrac{1}{2} d_{\mathbb{D}}(0,r)\right)$$

$$= \tanh\left(\tfrac{1}{2} l_0\right)$$

$$\cosh l_0 = \frac{e^{l_0}+e^{-l_0}}{2} = \frac{1}{2}\left[e^{\ln\frac{1+r}{1-r}} + e^{-\ln\frac{1+r}{1-r}}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1+r}{1-r} + \frac{1-r}{1+r}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{(1+r)^2+(1-r)^2}{1-r^2}\right]$$

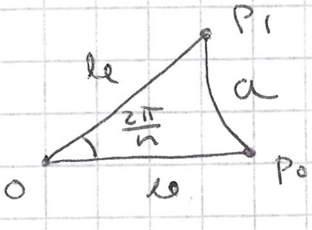
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1+r^2+2r+1+r^2-2r}{1-r^2}\right] = \frac{1+r^2}{1-r^2}$$

$$\sinh l_0 = \frac{e^{l_0}-e^{-l_0}}{2} = \frac{1}{2}\left[e^{\ln\frac{1+r}{1-r}} - e^{-\ln\frac{1+r}{1-r}}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1+r}{1-r} - \frac{1-r}{1+r}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{(1+r)^2-(1-r)^2}{1-r^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{4r}{1-r^2} = \frac{2r}{1-r^2}$$

~~[illegible]~~ Tarkastellaan kolmiota Δ, jonka kärjet ovat 0, p_0 ja p_1. Origosta lähtevien sivujen hyperbolinen pituus on l_0. Kolmannen sivun pituus olkoon a



1. Kosinilause : $\cosh a = \cosh b \cosh c - \sinh b \sinh c \cos \alpha$

$c = b \Rightarrow \cosh a = \cosh^2 b - \sinh^2 b \cos \frac{2\pi}{n}$

$$= \left(\frac{1+r^2}{1-r^2}\right) - \left(\frac{2r}{1-r^2}\right)^2 \cos \frac{2\pi}{n}$$

$$= \underline{\frac{(1+r^2) - 4r^2 \cos \frac{2\pi}{n}}{(1-r^2)^2}}$$