HYPERBOLINEN GEOMETRIA

Ratkaisut, harjoitus 3

(1) Kirjoitetaan $z = x + iy$ ja $z_0 = x_0 + iy_0$. Pisteitten z ja z_0 hyperboliselle etäisyydelle ylemmässä puolitasossa pätee

$$\cosh(d_{\mathbb{H}}(z, z_0)) = 1 + \frac{|z - z_0|^2}{2\mathrm{Im}z\mathrm{Im}z_0}.$$

Niinpä

$$\cosh(r) = 1 + \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{2y_0 y},$$

joten

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - 2y_0 \cosh(r)y + 2y_0 y = 0.$$

Täydentämällä neliöön saadaan

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0 \cosh(r))^2 = y_0^2 \cosh^2(r) - y_0^2 = y_0^2 \sinh^2(r).$$

Niinpä ympyrän C euklidinen keskipiste on $(x_0, y_0 \cosh(r))$ ja sen säde on $y_0 \sinh(r)$.

(2) (a) Neliön S euklidinen pinta-ala on $A(S) = h^2$.
(b) Neliön S hyperbolinen pinta-ala on

$$A_{\mathbb{H}}(S) = \int_a^{a+h} \int_b^{b+h} \frac{1}{y^2} dy dx = h(\frac{-1}{y}\Big|_b^{b+h}) = \frac{h^2}{b(b+h)}.$$

(c) Pinta-alojen suhde on

$$\frac{A_{\mathbb{H}}(S)}{A(S)} = \frac{1}{b(b+h)},$$

joten

$$\lim_{h \mapsto 0} \frac{A_{\mathbb{H}}(S)}{A(S)} = \frac{1}{b^2}.$$

(3) Kun samastetaan kompleksitaso avaruuden $\mathbb{R}^2$ kanssa, voidaan kuvaus f esittää muodossa $f(x, y) = (x + ay, y)$, missä $a > 0$. Kuvauksella f on jatkuvat osittaisderivaatat joka pisteessä ja

$$Df(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

joten $|Df(x, y)| = 1 \cdot 1 - a \cdot 0 = 1$. Koska $\mathrm{Im}f(z) = y = \mathrm{Im}z$, on

$$\frac{1}{(\mathrm{Im}f(z))^2} = \frac{1}{y^2} = \frac{1}{(\mathrm{Im}z)^2}.$$

Date: September 24, 2015.

Olkoon $U \subset \mathbb{H}$. Tällöin

$$A_{\mathbb{H}}(f(U)) = \int\int_{f(U)} \frac{1}{y^2} dxdy = \int\int_U \frac{1}{(\mathrm{Im} f(z))^2} |Df(x,y)| dxdy.$$

Sijoittamalla nähdään, että yllä oleva integraali on

$$\int\int_U \frac{1}{y^2} = A_{\mathbb{H}}(U).$$

(4) Olkoon $0 < r < 1$ ja olkoon

$$\sigma_r \colon [0, 2\pi] \to \mathbb{D}, \ \ \sigma_r(t) = re^{it}.$$

(a) Polulle σ_r pätee

$$|\sigma_r(t)|^2 = r^2 \ \text{ ja } \ \sigma_r'(t) = rie^{it},$$

joten

$$|\sigma_r'(t)| = r.$$

Polun σ_r hyperbolinen pituus on

$$L_{\mathbb{D}}(\sigma_r) = \int_0^{2\pi} \frac{2}{1 - |\sigma_r(t)|^2} |\sigma_r'(t)| dt = \int_0^{2\pi} \frac{2r}{1 - r^2} dt = \frac{4\pi r}{1 - r^2}.$$

(b)

$$\lim_{r \to 0} \frac{4\pi r}{1 - r^2} = 0.$$

(c)

$$\lim_{r \to 1-} \frac{4\pi r}{1 - r^2} = \infty.$$

(5) Olkoon

$$g \colon \mathbb{D} \to \mathbb{H}, \ \ z \mapsto \frac{z - i}{iz - 1}$$

luennolla käsitelty kuvaus. Merkitään

$$w = g(0) = i \ \text{ ja } \ z = g(x) = \frac{x - i}{ix - 1}.$$

Tällöin

$$d_{\mathbb{D}}(0, x) = d_{\mathbb{H}}(g(0), g(x)) = d_{\mathbb{H}}(w, z),$$

missä

$$\cosh(d_{\mathbb{H}}(w, z)) = 1 + \frac{|z - w|^2}{2 \mathrm{Im} z \mathrm{Im} w}.$$

Selvästi $\mathrm{Im} w = 1$. Kirjoitetaan

$$z = \frac{x - i}{ix - 1} = \frac{(x - i)(-ix - 1)}{x^2 + 1} = \frac{-2x + i(1 - x^2)}{x^2 + 1}.$$

Niinpä

$$\mathrm{Im} z = \frac{1 - x^2}{x^2 + 1}.$$

Edelleen

$$|z-w|^2 = |\frac{x-i}{ix-1} - i|^2 = |\frac{x-i+x+i}{ix-1}|^2 = \frac{4x^2}{x^2+1}.$$

Siis

$$\cosh(d_{\mathbb{H}}(w,z)) = 1 + \frac{4x^2}{x^2+1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2+1}{1-x^2} = \frac{1+x^2}{1-x^2},$$

joten

$$d_{\mathbb{H}}(z,w) = \ln(\frac{1+x^2}{1-x^2} + \sqrt{(\frac{1+x^2}{1-x^2})^2 - 1}) = \ln(\frac{1+x^2}{1-x^2} + \frac{2x}{1-x^2}) = \ln(\frac{1+x}{1-x}).$$

Niinpä

$$d_{\mathbb{D}}(0,x) = d_{\mathbb{H}}(z,w) = \ln(\frac{1+x}{1-x}).$$