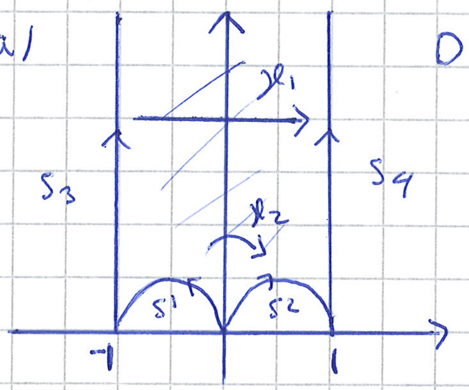
Hyperbolinen geometria

Harjoitus 12.

1)

a)



b) $\gamma_1(z) = z + 2$, $\gamma_1^{-1}(z) = z - 2$

$\mathrm{Re}\, z = -1 \iff \mathrm{Re}(\gamma_1(z)) = \mathrm{Re}(z+2) = 1$

Siis $\gamma_1(s_3) = s_4$ ja $\gamma_1^{-1}(s_4) = s_3$

$\gamma_2(z) = \frac{z}{2z+1}$ Möbius-kuvaus

$\gamma(-1) = \frac{-1}{2\cdot(-1)+1} = 1$

$\gamma(0) = 0$

Siis $\gamma(s_1) = s_2$

c) Monikulmiolla D ei ole kärkiä ylemmänä puolitasossa $\mathbb{H}$ $\Rightarrow$ ei ole elliptisiä syklejä

2) a) $(-1, s_1) \xrightarrow{\gamma_2} (1, s_2) \xrightarrow{*} (1, s_4)$

$\xrightarrow{\gamma_1^{-1}} (-1, s_3) \xrightarrow{*} (-1, s_1)$

$(0, s_1) \xrightarrow{\gamma_2} (0, s_2)$

$\xrightarrow{*} (0, s_1)$

parab. sykli 0

parab. syklikuvaus

γ_2, $\mathrm{tr}(\gamma_2) = (1+1)^2 = 4$

$\Rightarrow$ γ_2 on parabolinen

$\Rightarrow$ parabolinen sykli $-1 \mapsto 1$

$\Rightarrow$ parabolinen syklikuvaus $\gamma_1^{-1}\gamma_2$

$$\gamma_1^{-1}\gamma_2(z) = \frac{z}{2z+1} - 2 = \frac{-3z-2}{2z+1}$$

$-3\cdot 1 - (-2)\cdot 2 = 1 \Rightarrow \gamma_1^{-1}\gamma_2$ on normalisoitu

$tr(\gamma_1^{-1}\gamma_2) = (-3+1)^2 = 4 \Rightarrow \gamma_1^{-1}\gamma_2$ on parabolinen

$\Rightarrow$ sykli $-1 \mapsto 1$ toteuttaa parabolisen sykliehdon

$(\infty, s_3) \overset{\gamma_1}{\longmapsto} (\infty, s_4) \overset{*}{\longmapsto} (\infty, s_3)$

$\Rightarrow$ parabolinen sykli ∞

$\Rightarrow$ parabolinen syklikuvaus γ_1

$\gamma_1(z) = \dfrac{z+2}{0\cdot z+1} \Rightarrow tr(\gamma_1) = (1+1)^2 = 4 \Rightarrow \gamma_1$ on parabolinen

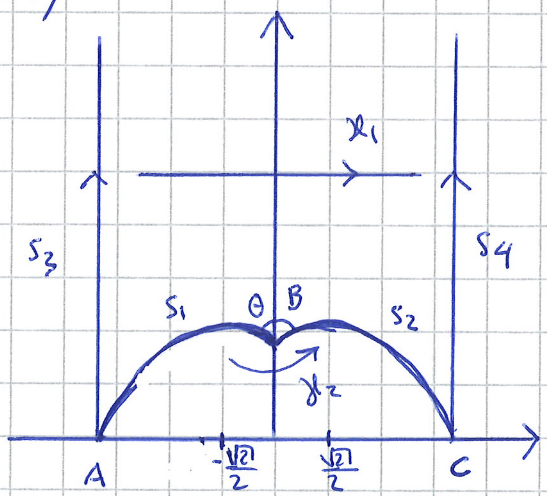
b) Koska elliptisiä syklikuvauksia ei ole ja paraboliset syklit toteuttavat parabolisen sykliehdon, seuraa Poincarén lauseesta, että sivuja yhdistävät kuvaukset γ_1 ja γ_2 virittävät Fuchsin ryhmän Γ_1 jonka perusalue on D.

c) Koska elliptisiä syklejä ei ole, ei saada relaatioita. Siis

$$\Gamma = \langle \gamma_1, \gamma_2 \rangle$$

on kahden virittäjän vapaa ryhmä.

3) a)



$A = -(1+\frac{\sqrt{2}}{2})$
$B = i\frac{\sqrt{2}}{2}$
$C = 1+\frac{\sqrt{2}}{2}$
∞

b) S_1: osa ympyrää, jonka keskipiste on $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ja säde on 1

S_2: osa ympyrää, jonka keskipiste on $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ja säde on 1

ympyröitten leikkauspiste $\mathbb{H}$:ssa on $B = i\frac{\sqrt{2}}{2}$

olkoon $\bar{n}_1 = i\frac{\sqrt{2}}{2} - (-\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

ja $\bar{n}_2 = i\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow \bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (-\frac{\sqrt{2}}{2}) + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$

$\Rightarrow \angle(\bar{n}_1, \bar{n}_2) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}.$

c) Olkoon $\gamma_1(z) = z + 2 + \sqrt{2}$

$\gamma_2(z) = \frac{\sqrt{2}z - 1}{2z + \sqrt{2}}$

γ_1 Möbius-kuvaus

$S_3 = \{ z \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Re} z = -(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}) \}$

$S_4 = \{ z \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Re} z = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \}$

$\operatorname{Re}(\gamma_1(z)) = \operatorname{Re}(z + 2 + \sqrt{2}) = \operatorname{Re}(z) + 2 + \sqrt{2}$

$\operatorname{Re}(z) = -(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}) \Rightarrow \operatorname{Re}(\gamma_1(z)) = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 + \sqrt{2} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$

Siis $\gamma_1(S_3) = S_4$, joten γ_1 on sivut S_3 ja S_4 yhdistävä kuvaus.

γ_2 Möbius-kuvaus

$\gamma_2(i\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{i - 1}{i\sqrt{2} + \sqrt{2}} = \frac{(i-1)(-i\sqrt{2} + \sqrt{2})}{2 + 2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}i + \sqrt{2}i - \sqrt{2}}{4} = i\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\gamma_2(-1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{-\sqrt{2} - 1 - 1}{-2 - \sqrt{2} + \sqrt{2}} = \frac{2 + \sqrt{2}}{2} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$

Siis $\gamma_2(B) = B$ ja $\gamma_2(A) = C$, joten $\gamma_2(S_1) = S_2$ ja γ_2 on sivut S_1 ja S_2 yhdistävä kuvaus.

4) a) $(B, S_1) \xmapsto{\gamma_2} (B, S_2) \xmapsto{*} (B, S_1)$

$\Rightarrow$ Elliptinen sykli $\mathcal{E} : B$

vastaava syklikuvaus γ_2

b) $(A, S_1) \xmapsto{\gamma_2} (C, S_2) \xmapsto{*} (C, S_4)$

$\xmapsto{\gamma_1^{-1}} (A, S_3) \xmapsto{*} (A, S_1)$

parabolinen sykli $P_1 : A \mapsto C$

vastaava syklikuvaus $\gamma_1^{-1}\gamma_2$

$(\infty, S_3) \xmapsto{\gamma_1} (\infty, S_4) \xmapsto{*} (\infty, S_3)$

parabolinen sykli $P_2 : \infty$

vastaava syklikuvaus γ_1

c) Sykliehdot:

$\angle \mathcal{E} = \angle B = \frac{\pi}{2} \Rightarrow 4 \cdot \angle \mathcal{E} = 2\pi \Rightarrow \mathcal{E}$ toteuttaa elliptisen sykliehdon

$P_2 : \gamma_1(z) = z + 2 + \sqrt{2} = \dfrac{z + 2 + \sqrt{2}}{0 \cdot z + 1}$

$\mathrm{tr}(\gamma_1) = (1+1)^2 = 4 \Rightarrow \gamma_1$ on parabolinen kuvaus

$\Rightarrow P_2$ toteuttaa parabolisen sykliehdon

$$\gamma_1^{-1}\gamma_2(z) = \frac{\sqrt{2}z-1}{2z+\sqrt{2}} - 2 - \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}z - 1 - 4z - 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}z - 2}{2z+\sqrt{2}}$$

$$= \frac{(-\sqrt{2}-4)z - (3+2\sqrt{2})}{2z+\sqrt{2}}$$

$$= \frac{-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+2\right)z - \left(\frac{3}{2}+\sqrt{2}\right)}{z + \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+2\right)\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3}{2} + \sqrt{2} = -\frac{2}{4} - \sqrt{2} + \frac{3}{2} + \sqrt{2}$$

$$= -\frac{2}{4} + \frac{6}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$\mathrm{tr}(\gamma_1^{-1}\gamma_2) = \left[-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+2\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\right]^2 = 2^2 = 4$$

$\Rightarrow$ $\gamma_1^{-1}\gamma_2$ on parabolinen kuvaus

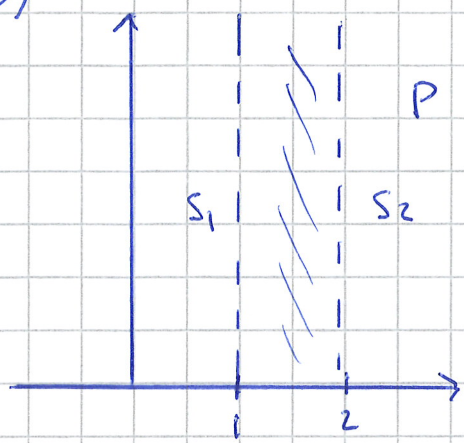
$\Rightarrow$ P_1 toteuttaa parabolisen syklielhdon

d) Poincarén lause $\Rightarrow$ sivuja yhdistävät kuvaukset γ_1 ja γ_2 virittävät Fuchsin ryhmän Γ, jonka perusalue on D.

e) Elliptinen sykli $\mathcal{E}$, vastaava sykli kuvaus γ_2, $m_\mathcal{E} = 4$
$\Rightarrow$ relaatio $\gamma_2^4 = e$

Siis $\Gamma = \langle \gamma_1, \gamma_2 \mid \gamma_2^4 = e \rangle$

5)



$P = \{ z \in \mathbb{H} \mid 1 < \operatorname{Re} z < 2 \}$

a) Olkoon $\gamma : z \mapsto 2z$

Tällöin γ on Möbius-kuvaus, $\gamma(S_1) = S_2$.

Siis γ yhdistää sivut S_1 ja S_2.

b) Olkoon $\Gamma = \langle \gamma \rangle$.

Siis $\Gamma = \langle \gamma_n \mid \gamma_n(z) = 2^n z,\ n \in \mathbb{Z} \}$.

Olkoon $z \in P$, siis $z = x + iy$, $1 < x < 2$.

$\Rightarrow \gamma_n(z) = 2^n(x+iy) = 2^n x + i\, 2^n y \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

Erityisesti $\operatorname{Re}(\gamma_n(z)) = 2^n x > 0 \quad \forall n$

Siis $\mathbb{H} \neq \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \gamma_n(P)$, joten P ei voi olla

ryhmän Γ perusalue. $\square$