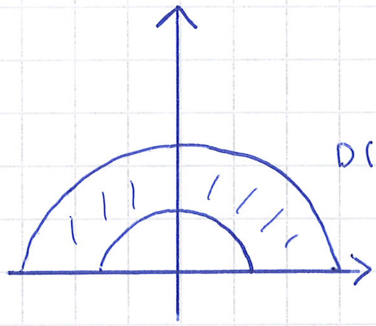
Hyperbolinen geometria

Harjoitus 11:

1) Katso luentomuistiinpanot.

3) Olkoon $\Gamma = \{ g_n \mid g_n(z) = 2^n, n \in \mathbb{Z} \}$. Ryhmän Γ Dirichlet'n monikulmio on

$$D(i) = \{ z \in \mathbb{H} \mid \tfrac{1}{\sqrt{2}} < |z| < \sqrt{2} \}.$$



Sivut: $S_1 : |z| = \frac{1}{\sqrt{2}}$
$S_2 : |z| = \sqrt{2}$

Olkoon $g_1 : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, $g_1(z) = 2z$
Tällöin $g_1 \in \Gamma$ ja $g_1(S_1) = S_2$.

Olkoon $g_2 : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, $g_2(z) = 2^{-1} z$.
Tällöin $g_2 \in \Gamma$ ja $g_2(S_2) = S_1$.

Sivuja yhdistävät kuvaukset ovat g_1 ja g_2.

4) a) Olkoon Γ Fuchsin ryhmä ja olkoon F ryhmän Γ perusalue. Olkoon $w \in F$.

<u>Väite:</u> $F - \{w\}$ on ryhmän Γ perusalue.

<u>Tod.</u> 1) F perusalue $\Rightarrow F$ avoin $\Rightarrow F - \{w\}$ avoin

2) Olkoon $g_1, g_2 \in \Gamma$, $g_1 \neq g_2$. Tällöin $g_1(F) \cap g_2(F) = \emptyset$, joten $g_1(F - \{w\}) \cap g_2(F - w) = \emptyset$.

3) Sulkeuma $\overline{F - \{w\}} = \overline{F}$, koska w on F:n sisäpiste. Siis

$$\bigcup_{g \in \Gamma} g(\overline{F - \{w\}}) = \bigcup_{g \in \Gamma} g(\overline{F}) = \mathbb{H}$$, koska $\overline{F}$ on Γ:n perusalue.

$\square$

10) Olkoon F Fuchsin ryhmän Γ lokaalisti äärellinen perusalue. Olkoon $z \in \mathbb{H}$. Osoita, että z:lla on ympäristö U ja ryhmässä Γ on kuvaukset $g_1, \ldots, g_n$:

i) $z \in g_1(\bar{F}) \cap \cdots \cap g_n(\bar{F})$
ii) $U \subset g_1(\bar{F}) \cup \cdots \cup g_n(\bar{F})$
iii) $g(\bar{F}) \cap U = \emptyset \quad \forall g \in \Gamma - \{g_1, \ldots, g_n\}$.

Tod. Koska F on lokaalisti äärellinen, z:lla on ympäristö V, jolle pätee $V \cap g(\bar{F}) \neq \emptyset$ vain äärellisen monella $g \in \Gamma$. Olkoot tällaiset ryhmän Γ alkiot g_i, $i \in I$, missä I on äärellinen joukko. Olkoot $J \subset I$ niiden indeksien i joukko, joille $z \in g_i(\bar{F})$. Tällöin

$$U = V - \underbrace{\bigcup_{i \in I-J} g_i(\bar{F})}_{\text{suljettu}}$$

on pisteen z avoin ympäristö ja $z \in g_i(\bar{F})$ $\forall i \in J$. Lisäksi $g(\bar{F}) \cap U = \emptyset$ $\forall g \in \Gamma - \{g_i \mid i \in J\}$ ja

$$U \subset \bigcup_{i \in J} g_i(\bar{F}) \qquad \square$$

2)

a) Olkoon $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ kokoelma ylemmän puolitason osajoukkoja. Osoita, että seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:

i) Kokoelma $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ on lokaalisti äärellinen.

ii) Kaikilla ylemmän puolitason kompakteilla osajoukoilla K pätee $X_\alpha \cap K \neq \emptyset$ ainoastaan äärellisen monella joukolla X_α.

Tod. i $\Rightarrow$ ii: Oletetaan, että $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ on lokaalisti äärellinen. Olkoon $K \subset \mathbb{H}$, K kompakti. Jokaisella $x \in K$ on sellainen ympäristö U_x, että $U_x \cap X_\alpha \neq \emptyset$ vain äärellisen monella X_α. Joukot U_x, $x \in K$, muodostavat K:n avoimen peitteen. Koska K on kompakti, tällä peitteellä on äärellinen osapeite $U_{x_1}, \ldots, U_{x_n}$. Koska $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$ ja $\forall i$: $U_{x_i} \cap X_\alpha \neq \emptyset$ vain äärellisen monella X_α, on myös $K \cap X_\alpha \neq \emptyset$ vain äärellisen monella X_α.

ii $\Rightarrow$ i: Oletetaan, että kohdan ii ehto on voimassa. Olkoon $x \in \mathbb{H}$. Tällöin pisteellä x on ympäristö U, jonka sulkeuma $\bar{U}$ on kompakti. Siis $\bar{U} \cap X_\alpha \neq \emptyset$ vain äärellisen monella X_α, joten myös $U \cap X_\alpha \neq \emptyset$ vain äärellisen monella X_α. Siis $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ on lokaalisti äärellinen. $\square$

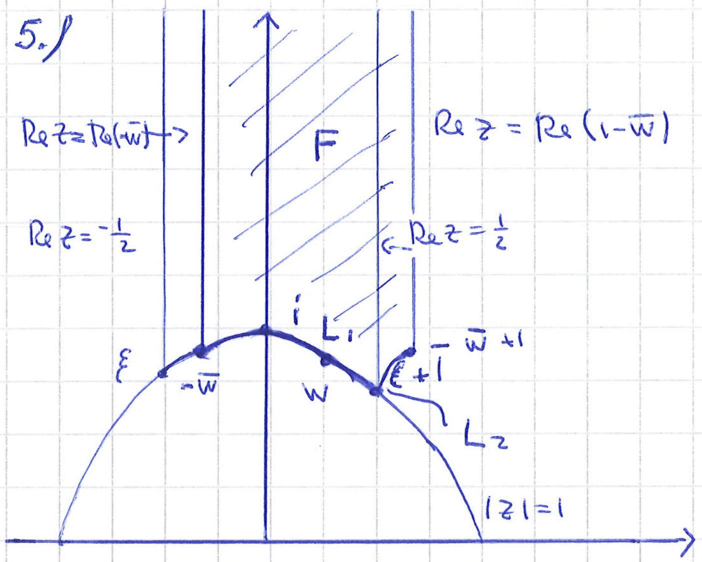
b) Olkoon X_α $\mathbb{H}$:n puolitaso, jonka määrittelee geodeesi l_α, $\alpha \in A$. Olkoon kokoelma $\{l_\alpha\}_{\alpha \in A}$ lokaalisti äärellinen. Osoita, että $\{l_\alpha\}_{\alpha \in A}$ on numeroituva.

Olkoon $\{B_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ ylemmän puolitason numeroituva kanta. Olkoon $x \in \mathbb{H}$. Tällöin x:llä on ympäristö U_x, jolla $U_x \cap l_\alpha \neq \emptyset$ vain äärellisen monella l_α. Siirtymällä pienempään ympäristöön, voidaan olettaa, että $U_x = B_i$, jollakin B_i, $i \in \mathbb{N}$. Siis $\mathbb{H}$ voidaan peittää joukoilla B_i, $i \in J \subset \mathbb{N}$ ja jokaiselle $B_i, i \in J$, pätee $B_i \cap \ell_\alpha \neq \emptyset$ vain äärellisen monella ℓ_α. Tällöin

$$\{\ell_\alpha\}_{\alpha \in A} = \bigcup_{i \in J} \underbrace{\{\ell_\alpha \mid \ell_\alpha \cap B_i \neq \emptyset\}}_{\text{äärellinen}}$$

on numeroituva. □

5./



Harj 10 ⇒

$F_1 = \{z \in \mathbb{H} \mid |z| > 1, -\frac{1}{2} < \mathrm{Re}\, z < \frac{1}{2}\}$ on ryhmän $\Gamma = PSL(2, \mathbb{Z})$ perusalue.

Olkoon $\gamma' \in \Gamma$, $\gamma'(z) = z + 1$.
Olkoon $A = \{z \in \mathbb{H} \mid |z| > 1, \mathrm{Re}\, \xi \leq \mathrm{Re}\, z < \mathrm{Re}(-\bar{w})\}$
Olkoon $B = \{z \in \mathbb{H} \mid |z| > 1, \mathrm{Re}(-\bar{w}) < \mathrm{Re}\, z \leq \mathrm{Re}(\xi + 1)\}$
Then

$$F = \gamma'(A) \cup B, \qquad \bar{F}_1 = \bar{A} \cup \bar{B}$$

joten F on avoin. Pätee:

$$\mathbb{H} = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(\bar{F}_1) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(\bar{A} \cup \bar{B}) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} [\gamma(\bar{A}) \cup \gamma(\bar{B})]$$

$$= \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \Big(\gamma(\underbrace{\gamma'(\bar{A})}_{\overline{\gamma'(A)}}) \cup \gamma(\bar{B})\Big) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma\big(\overline{\gamma'(A)} \cup \bar{B}\big)$$

$$= \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma\big(\overline{\gamma'(A) \cup B}\big) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(\bar{F}).$$

5.) jatkoa

Kirjoitetaan $F = \operatorname{int} B \cup \gamma'(\operatorname{int} A) \cup C$, missä

$$C = \{ z \in \mathbb{H} \mid |z| > 1, \operatorname{Re} z = \operatorname{Re}(\xi + 1) \}.$$

Tällöin $\operatorname{int} B \subset F_1$, joten $\gamma(\operatorname{int} B) \cap (\operatorname{int} B) \subset \gamma(F_1) \cap F_1 = \emptyset$ $\forall \gamma \neq id.$

Samoin $\gamma'(\operatorname{int} A) \subset \gamma'(F_1)$, joten

$$\gamma(\gamma'(\operatorname{int} A)) \cap \gamma'(\operatorname{int} A) \subset \gamma(\gamma'(F_1)) \cap \gamma'(F_1) = \emptyset \quad \forall \gamma \neq id.$$

Edelleen $\gamma(\operatorname{int} B) \cap \gamma'(\operatorname{int} A) \subset \gamma(F_1) \cap \gamma'(F_1) \neq \emptyset$

ainoastaan kun $\gamma = \gamma'$. Mutta $\gamma'(\operatorname{int} B) \cap \gamma'(\operatorname{int} A) = \emptyset$.

Jos $\gamma(C) \cap F \neq \emptyset$, niin $\exists\, x \in C \wedge y \in F : \gamma(x) = y$.
Tällöin x:n ympäristössä on joukkojen $\operatorname{int} B$ ja $\gamma'(\operatorname{int} A)$ alkioita, jotka γ vie yhdisteelle $\gamma(\operatorname{int} B) \cup \gamma(\gamma'(\operatorname{int} A))$.
Edellä osoitetun perusteella tämä on mahdotonta.
Siis $\gamma(F) \cap F = \emptyset$ $\forall \gamma \in \Gamma - \{id\}$.

$\square$