Hyperbolinen geometria

1)

a) Olkoot $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$.

Väite: Hyperbolisen janan $[z_1, z_2]$ keskinormaali on

$$\{ z \in \mathbb{H} \mid y_2 |z - z_1|^2 = y_1 |z - z_2|^2 \}.$$

Tod. Lause 17.4 $\Rightarrow$ janan $[z_1, z_2]$ keskinormaali on suora

$$L = \{ z \in \mathbb{H} \mid d_{\mathbb{H}}(z, z_1) = d_{\mathbb{H}}(z, z_2) \}.$$

Siis

$$
\begin{aligned}
& z \in L \\
\Leftrightarrow\ & d_{\mathbb{H}}(z, z_1) = d_{\mathbb{H}}(z, z_2) \\
\Leftrightarrow\ & \cosh d_{\mathbb{H}}(z, z_1) = \cosh d_{\mathbb{H}}(z, z_2) \\
\Leftrightarrow\ & 1 + \frac{|z - z_1|^2}{2y_1 \operatorname{im} z} = 1 + \frac{|z - z_2|^2}{2y_2 \operatorname{im} z} \\
\Leftrightarrow\ & y_2 |z - z_1|^2 = y_1 |z - z_2|^2. \quad \square
\end{aligned}
$$

b) Olkoon $z = x + iy$. Kohdan a perusteella z on janan $[1 + 2i, (6 + 8i)/5]$ keskinormaalilla, jos ja vain jos

$$\frac{8}{5} |z - 1 - 2i|^2 = 2 \left| z - \frac{6 + 8i}{5} \right|^2,$$

eli

$$4 \left((x-1)^2 + (y-2)^2 \right) = 5 \left((x - \tfrac{6}{5})^2 + (y - \tfrac{8}{5})^2 \right).$$

$$\Leftrightarrow\ 4x^2 - 8x + 4 + 4y^2 - 16y + 16 = 5x^2 - 12x + \frac{36}{5} + 5y^2 - 16y + \frac{64}{5}$$

$$\Leftrightarrow\ x^2 - 4x + y^2 + 20 - 20 = 0$$

$\Leftrightarrow \quad x^2 - 4x + y^2 = 0$

$\Leftrightarrow \quad (x-2)^2 + y^2 = 2^2$

Siis keskinormaali on puoliympyrä, jonka keskipiste on $(2,0)$ ja säde on 2.

2) Ryhmä $\Gamma = \{ g_n \mid g_n(z) = 2^n z,\ n \in \mathbb{Z} \}$ on Fuchsin ryhmä. Valitse sopiva p ja konstruoi Dirichlet'n alue $D(p)$.

Valitaan $p = i$. ($2^n i \neq i \ \forall\, n \neq 0$)
Hyperbolinen jana $[i, g_n(i)] = [i, 2^n i]$ on pisteitten i ja $2^n i$ välinen imaginääriakselin osa. Olkoon ix janan $[i, 2^n i]$ hyperbolinen keskipiste.
Olkoon $n > 0$. Tällöin $d_{\mathbb{H}}(i, ix) = d_{\mathbb{H}}(ix, 2^n i)$, joten $\ln \frac{x}{1} = \ln \frac{2^n}{x}$. Siis $x = \frac{2^n}{x} \Rightarrow x^2 = 2^n \Rightarrow x = 2^{n/2}$.
Janan $[i, 2^n i]$ keskinormaali on origokeskinen ympyrä, jonka säde on $2^{n/2}$. Niinpä

$$H_i(g_n) = \{ z \in \mathbb{H} \mid |z| < 2^{n/2} \}$$

Jos $n < 0$, nähdään samoin, että

$$H_i(g_n) = \{ z \in \mathbb{H} \mid |z| > 2^{n/2} \}$$

Siis

$$D(i) = \bigcap_{g_n \in \Gamma - \{id\}} H_i(g_n)$$

$$= \{ z \in \mathbb{H} \mid |z| < 2^{1/2} \} \cap \{ z \in \mathbb{H} \mid |z| > 2^{-1/2} \}$$

$$= \{ z \in \mathbb{H} \mid \tfrac{1}{\sqrt{2}} < |z| < \sqrt{2} \}.$$

3) Olkoon Γ Fuchsin ryhmä.
Olkoon $p \in \mathbb{H}$: $\gamma(p) \neq p \quad \forall \gamma \in \Gamma - \{id\}$.
Tällöin

$$D(p) = \{ z \in \mathbb{H} \mid d_{\mathbb{H}}(z,p) < d_{\mathbb{H}}(z, \gamma(p)) \ \forall \gamma \in \Gamma - \{id\} \}$$

a) <u>Väite:</u>

$$D(p) = \underbrace{\{ z \in \mathbb{H} \mid d_{\mathbb{H}}(z,p) < d_{\mathbb{H}}(\gamma(z), p) \ \forall \gamma \in \Gamma - \{id\} \}}_{=A}.$$

<u>Tod.</u>

$$z \in D(p)$$

$$\Leftrightarrow \quad d_{\mathbb{H}}(z,p) < d_{\mathbb{H}}(z, \gamma(p)) \quad \forall \gamma \in \Gamma - \{id\}$$

$$\Leftrightarrow \quad d_{\mathbb{H}}(z,p) < d_{\mathbb{H}}(\gamma^{-1}(z), p) \quad \forall \gamma \in \Gamma - \{id\}$$

$$\Leftrightarrow \quad d_{\mathbb{H}}(z,p) < d_{\mathbb{H}}(\gamma(z), p) \quad \forall \gamma \in \Gamma - \{id\}$$

$$\Leftrightarrow \quad z \in A . \ \square$$

b) Kirjoitetaan

$$\gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad , \quad ad-bc=1$$

kun $\gamma \in \Gamma$.

Olkoon $B = \{ z \in \mathbb{H} \mid \frac{|\gamma(z)-p|}{|z-p|} > \frac{1}{|cz+d|} \ \forall \gamma \in \Gamma - \{id\} \}$.

Nyt $z \in D(p)$

$$\Leftrightarrow \quad d_{\mathbb{H}}(z,p) < d_{\mathbb{H}}(\gamma(z), p) \quad \forall \gamma \in \Gamma - \{id\}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cosh(d_{\mathbb{H}}(z,p)) < \cosh(d_{\mathbb{H}}(\gamma(z),p)) \quad \forall \gamma \in \Gamma - \{id\}$$

($\cosh x$ kasvava kun $x > 0$)

$$\Leftrightarrow \quad 1 + \frac{|z-p|^2}{2\,\mathrm{im}\, z\, \mathrm{im}\, p} < 1 + \frac{|\gamma(z)-p|^2}{2\,\mathrm{im}\,\gamma(z)\,\mathrm{im}\, p} \quad \forall \gamma \in \Gamma - \{id\}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{|\gamma(z)-p|^2}{|z-p|^2} > \frac{\mathrm{im}\,\gamma(z)}{\mathrm{im}\, z}$$

$$= \frac{ad-bc}{|cz+d|^2} \frac{\mathrm{im}\, z}{\mathrm{im}\, z} \quad \text{(Luentomoniste, HT 5.3)}$$

$$= \frac{1}{|cz+d|^2} \quad \forall \gamma \in \Gamma - \{id\}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{|\gamma(z)-p|}{|z-p|} > \frac{1}{|cz+d|} \quad \forall \gamma \in \Gamma - \{id\}$$

$$\Leftrightarrow \quad z \in B.$$

Siis $B = D(p)$.

4) Olkoon Γ = Fuchsin ryhmä
Olkoon $p \in \mathbb{H}$: $\gamma(p) \neq p \quad \forall \gamma \in \Gamma - \{id\}$.

<u>Väite</u>: Kokoelma

$$\{\gamma(\overline{D(p)}) \mid \gamma \in \Gamma\}$$

on lokaalisti äärellinen.

<u>Tod.</u> Olkoon $z \in \mathbb{H}$ ja olkoon $r > 0$ niin suuri, että

$$z \in B_r(p) = \{z' \in \mathbb{H} \mid d_{\mathbb{H}}(z', p) < r\}.$$

Olkoon $\gamma \in \Gamma$, oletetaan, että $B_r(p) \cap \gamma(\overline{D(p)}) \neq \phi$.

Tällöin $\exists\, w \in \overline{D(p)}$: $d_{\mathbb{H}}(\gamma(w), p) < r$.

Koska $w \in \overline{D(p)}$, on $d_{\mathbb{H}}(w, p) \leq d_{\mathbb{H}}(w, \gamma^{-1}(p))$.

Siis

$$
\begin{aligned}
d_{\mathbb{H}}(p, \gamma(p)) &\overset{\Delta}{\leq} d_{\mathbb{H}}(p, \gamma(w)) + d_{\mathbb{H}}(\gamma(w), \gamma(p)) \\
&< r + d_{\mathbb{H}}(w, p) \leftarrow \text{samat} \\
&\leq r + d_{\mathbb{H}}(w, \gamma^{-1}(p)) \\
&= r + d_{\mathbb{H}}(\gamma(w), p) \quad \text{samat} \\
&< r + r = 2r
\end{aligned}
$$

Koska pisteen p rata on suljettu ja diskreetti, on joukossa $B_{2r}(p)$ ainoastaan äärellisen monta radan p pistettä. Koska myös $\gamma(p) \neq p \; \forall \; \gamma \in \Gamma$, $\gamma \neq id$, seuraa tästä, että

$$d_{\mathbb{H}}(p, \gamma(p)) < 2r$$

ainoastaan äärellisen monella γ. Niinpä $B_r(p)$ on pisteen z ympäristö, jolle

$$B_r(p) \cap \gamma(\overline{D(p)}) \neq \emptyset$$

ainoastaan äärellisen monella γ. Koska z on avaruuden $\mathbb{H}$ mielivaltainen piste, seuraa tästä, että

$$\{ \gamma(\overline{D(p)}) \mid \gamma \in \Gamma \}$$

on lokaalisti äärellinen. $\square$

5) Katso luentomoniste.