HYPERBOLINEN GEOMETRIA

Ratkaisut, harjoitus 1

(1) (a) avoin, ei suljettu
(b) ei avoin, ei suljettu
(c) avoin, ei suljettu
(d) ei avoin, ei suljettu
(e) ei avoin, ei suljettu
(f) avoin, ei suljettu
(g) avoin, ei suljettu
(h) avoin, ei suljettu

(2) (a) $\overline{V_1} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re} z \leq 5\} \cup \{\infty\}$ ja $\partial V_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re} z = 5\} \cup \{\infty\}$
(b) $\overline{V_2} = V_2$ ja $\partial V_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 2\}$
(c) $\overline{V_3} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 2\}$ ja $\partial V_3 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 2\}$
(d) $\overline{V_4} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 2\}$ ja $\partial V_4 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 2\} \cup \{i\}$
(e) $\overline{V_5} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \geq 7\} \cup \{\infty\}$ ja $\partial V_5 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 7\} \cup \{\infty\}$
(f) $\overline{V_6} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \geq 7\} \cup \{\infty\}$ ja $\partial V_6 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 7\}$

(3) Ylemmän puolitason $\mathbb{H}$ reuna äärettömyydessä on $\partial\mathbb{H} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Joukon $X \subset \mathbb{H}$ reuna äärettömyydessä on määritelmän mukaan $\overline{X} \cap \partial\mathbb{H}$, missä $\overline{X}$ tarkoittaa joukon X sulkeumaa Riemannin pallolla.
(a) $\overline{V_1} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1, \mathrm{Im} z \geq 0\}$, joten $\overline{V_1} \cap \partial\mathbb{H} = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 1\}$
(b) $\overline{V_2} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \geq 2, \mathrm{Im} z \geq 0\} \cup \{\infty\}$, joten $\overline{V_2} \cap \partial\mathbb{H} = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq 2\} \cup \{\infty\}$
(c) $\overline{V_3} \cap \partial\mathbb{H} = \emptyset$
(d) $\overline{V_4} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}, x \geq -2, y = x + 2\} \cup \{\infty\}$, joten $\overline{V_4} \cap \partial\mathbb{H} = \{-2, \infty\}$

Date: September 9, 2015.

(4) Olkoon $w = J(z) = \frac{1}{z}$. Kirjoitetaan $w = x + iy$. Tällöin

$$\begin{aligned}
&|z-1| = 2 \\
\Leftrightarrow &|\frac{1}{w} - 1| = 2 \\
\Leftrightarrow &|1-w| = 2|w| \\
\Leftrightarrow &|1-x-iy| = 2|x+iy| \\
\Leftrightarrow &(1-x)^2 + y^2 = 4x^2 + 4y^2 \\
\Leftrightarrow &3x^2 + 3y^2 + 2x = 1 \\
\Leftrightarrow &x^2 + \frac{2}{3}x + y^2 = \frac{1}{3} \\
\Leftrightarrow &(x + \frac{1}{3})^2 + y^2 = \frac{1}{3} + (\frac{1}{3})^2 = (\frac{2}{3})^2.
\end{aligned}$$

Niinpä $J(C)$ on kompleksitason ympyrä, jonka keskipiste on $(-\frac{1}{3}, 0)$ ja jonka säde on $\frac{2}{3}$.

(5) Pisteet $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ ja $(0,0,1)$ ovat sekä tason P että yksikköpallon $\mathbb{S}^2$ pisteitä. Niinpä leikkaus $P \cap \mathbb{S}^2$ on ympyrä pallolla $\mathbb{S}^2$. Koska piste $N = (0,0,1)$ on tällä ympyrällä, kuvaa stereografinen projektio ξ ympyrän euklidisen suoran l ja joukon $\{\infty\}$ yhdisteeksi luennolla todistetun lauseen perusteella. Pisteet

$$\xi(1,0,0) = 1 \text{ ja } \xi(0,1,0) = i$$

ovat suoralla l, joten suoran l yhtälöksi saadaan $x + y = 1$ (tai $\mathrm{Re}z + \mathrm{Im}(z) = 1$). Niinpä

$$\xi(P \cap \mathbb{S}^2) = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid x + iy = 1\} \cup \{\infty\}.$$