HYPERBOLINEN GEOMETRIA

Tehtävät 2.11. alkavalle viikolle

(1) Olkoon X topologinen avaruus ja olkoon G ryhmä avaruuden X homeomorfismeja.
   (a) Osoita, että avaruuden X pisteitten radat muodostavat avaruuden X osituksen.
   (b) Olkoon $x \in X$ ja olkoon $g \in G$. Osoita, että pisteitten x ja $gx = g(x)$ isotropiaryhmille pätee $G_{gx} = gG_x g^{-1}$.

(2) Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Olkoon $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ äärellinen ryhmä avaruuden X homeomorfismeja. Olkoon

$$\tilde{d}\colon X \times X \to \mathbb{R}, \ \ (x, y) \mapsto \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} d(g_i(x), g_i(y)).$$

   (a) Osoita, että $\tilde{d}$ on avaruuden X metriikka.
   (b) Osoita, että kaikilla $i \in \{1, \dots, n\}$, kuvaus $g_i \colon X \to X$ on isometria metriikan $\tilde{d}$ suhteen.

(3) Olkoon $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ Möbius-kuvausten

$$\gamma(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

missä $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ ja $ad - bc = 1$, muodostama ryhmä. Ryhmä $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ toimii reunalla $\partial\mathbb{H}$.
   (a) Etsi jokin piste $x \in \partial\mathbb{H}$, jonka rata ei ole diskreetti.
   (b) Etsi jokin piste $x \in \partial\mathbb{H}$, jonka isotropiaryhmä on ääretön.

(4) Olkoon Γ Fuchsin ryhmä, $\Gamma \subset \mathrm{Möb}(\mathbb{H})$. Olkoon K ylemmän puolitason kompakti osajoukko, $K \neq \emptyset$. Osoita, että joukko

$$\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(K) \cap K \neq \emptyset\}$$

on äärellinen.

(5) Osoita, että jokainen Fuchsin ryhmä on numeroituva.

Date: October 29, 2015.