

HYPERBOLINEN GEOMETRIA

Tehtävät 26.10. alkavalle viikolle

(1) Osoita, että kaikilla $q \in \mathbb{N}$,

$\Gamma_q = \left\{ \gamma(z) = \frac{az + b}{cz + d} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1, b \text{ ja } c \text{ ovat jaollisia luvulla } q \right\}$
on ryhmän $\text{Möb}(\mathbb{H})$ aliryhmä.

(2) Olkoon X topologinen avaruus ja olkoon G ryhmä avaruuden X homeomorfismeja. Olkoon $x \in X$.

(a) Osoita, että pisteen x isotropiaryhmä G_x on ryhmän G aliryhmä.

(b) Olkoon Gx pisteen x rata. Osoita, että on olemassa bijektio $Gx \rightarrow G/G_x$.

(3) Olkoon $k > 0$, $k \neq 1$. Olkoon Γ ryhmän $\text{Möb}(\mathbb{H})$ aliryhmä, jonka virittävät kuvaukset $\gamma_1(z) = z + 1$ ja $\gamma_2(z) = kz$. Onko Γ Fuchsin ryhmä?

(4) Olkoon

$$\Gamma = \{ \gamma_{n,m} \mid \gamma_{n,m}(x, y) = (x + n, y + m), n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z} \}.$$

ryhmä tason \mathbb{R}^2 isometrioita. Määritä pisteen $(0, 0)$ rata $\Gamma(0, 0)$ ja isotropiaryhmä $\Gamma_{(0,0)}$.

(5) Olkoon $G = \text{Möb}(\mathbb{H})$. Määritä pisteen i rata Gi ylemmässä puolitasossa ja sen isotropiaryhmä G_i .