HYPERBOLINEN GEOMETRIA

Tehtävät 12.10. alkavalle viikolle

(1) (a) Etsi seuraavien Möbius-kuvausten kiintopisteet. Kunkin kuvauksen kohdalla päättele, onko kuvaus hyperbolinen, elliptinen vai parabolinen.
   (i) $\gamma_1(z) = \frac{3z+1}{-z}$,
   (ii) $\gamma_2(z) = \frac{z+1}{2}$,
   (iii) $\gamma_3(z) = \frac{z+1}{-z+1}$,
   (iv) $\gamma_4(z) = \frac{3z-4}{z-1}$.
(b) Normalisoi (a)-kohdan Möbius-kuvaukset ja laske kunkin kuvauksen jälki.

(2) Olkoot
(a)
$$\gamma_1(z) = \frac{2i\bar{z} - i}{3i\bar{z} - 2i},$$
(b)
$$\gamma_2(z) = \frac{i\bar{z} + 2i}{i\bar{z} + i},$$
missä $\bar{z}$ on luvun z liittoluku. Etsi kuvausten γ_1 ja γ_2 kiintopisteet joukossa $\mathbb{H} \cup \partial\mathbb{H}$.

(3) (a) Määritellään relaatio $\sim$ ryhmässä Möb($\mathbb{H}$) asettamalla $\gamma_1 \sim \gamma_2$, jos ja vain jos γ_2 on kuvauksen γ_1 konjugaatti. Osoita, että $\sim$ on ekvivalenssirelaatio.
(b) Olkoot $\gamma_1, \gamma_2 \in$ Möb($\mathbb{H}$) Möbius-kuvauksia. Osoita, että jos γ_1 ja γ_2 ovat toistensa konjugaatteja, niin tällöin $\mathrm{tr}(\gamma_1) = \mathrm{tr}(\gamma_2)$.
(c) Oletetaan, että Möbius-kuvaukset γ_1 ja γ_2 ovat toistensa konjugaatteja. Osoita, että jos γ_1 on hyperbolinen (vast. elliptinen, parabolinen), niin tällöin myös γ_2 on hyperbolinen (vast. elliptinen, parabolinen).

(4) Olkoon $\gamma(z) = z + b$, $b \in \mathbb{R}$. Osoita, että γ on kuvauksen $\gamma_1(z) = z + 1$ konjugaatti, jos $b > 0$, ja kuvauksen $\gamma_2(z) = z - 1$ konjugaatti, jos $b < 0$. Ovatko kuvaukset γ_1 ja γ_2 konjugaatteja?

(5) Osoita, että Möbius-kuvaukset $z \mapsto k_1 z$ ja $z \mapsto k_2 z$, missä $k_1, k_2 > 0$, $k_1 \neq 1$, $k_2 \neq 1$, ovat konjugaatteja, jos ja vain jos $k_1 = k_2$ tai $k_1 = 1/k_2$.

Huom.: Torstaina 15.10. ei ole luentoa.

Date: October 8, 2015.