

HYPERBOLINEN GEOMETRIA

Tehtävät 5.10. alkavalle viikolle

- (1) Olkoon Δ hyperbolinen kolmio, jonka kulmat ovat α , β ja $\gamma = \frac{\pi}{2}$. Olkoot kulmia vastaavien sivujen hyperboliset pituudet a , b ja c . Oletetaan, että $a, b, c < \infty$. Osoita, että

$$\tan \alpha = \frac{\tanh a}{\sinh b}.$$

(Kolmion Δ siirtämisestä sopivaan paikkaan Möbius-kuvauksen avulla voi olla hyötyä.)

- (2) Osoita, että tehtävän 1 tilanteessa

(a)

$$\cos \alpha = \frac{\tanh b}{\tanh c},$$

(b)

$$\sin \alpha = \frac{\sinh a}{\sinh c}.$$

- (3) Olkoon Δ hyperbolinen kolmio, jonka kulmat ovat α , $\beta = 0$ ja $\gamma = \frac{\pi}{2}$. Ainoastaan yhdellä kolmion sivuista on äärellinen hyperbolinen pituus, olkoon tämä pituus a . Osoita, että

$$\sin \alpha = \frac{1}{\cosh a}.$$

- (4) Osoita, että tehtävän 3 tilanteessa

(a)

$$\cos \alpha = \frac{1}{\coth \alpha},$$

(b)

$$\tan \alpha = \frac{1}{\sinh \alpha}.$$

- (5) Olkoon $P_n(r)$ Poincarén kiekon säännöllinen hyperbolinen monikulmio, jonka kärjet ovat pisteissä $p_k = re^{\frac{i2\pi k}{n}}$, missä $k \in \{0, \dots, n-1\}$. Laske monikulmion $P_n(r)$ sivun hyperbolinen pituus.