HYPERBOLINEN GEOMETRIA

Tehtävät 28.9. alkavalle viikolle

(1) Olkoon D_s Poincarén kiekon $\mathbb{D}$ avoin hyperbolinen kiekko, jonka hyperbolinen keskipiste on origo ja hyperbolinen säde on s.
  (a) Osoita, että kiekon D_s hyperbolinen pinta-ala on $4\pi \sinh^2(\frac{1}{2}s)$.
  (b) Osoita, että kiekon D_s reunan (eli hyperbolisen ympyrän $\{z \in \mathbb{D} \mid d_{\mathbb{D}}(z,0) = s\}$) hyperbolinen pituus on $2\pi \sinh(s)$.

(2) Olkoon R Poincarén kiekon alue kompleksitason ensimmäisessä neljänneksessä, jota rajoittavat euklidiset ympyrät $|z| = \frac{1}{2}$ ja $|z| = \frac{1}{3}$ ja suorat $\mathrm{Re}z = \mathrm{Im}z$ ja $\mathrm{Re}z = \sqrt{3}\,\mathrm{Im}z$. Laske alueen R hyperbolinen pinta-ala.

(3) Olkoon
$$C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{6}\}$$
Poincarén kiekon euklidinen ympyrä. Etsi ympyrän C hyperbolinen keskipiste ja säde.

(4) Olkoon C mikä tahansa Poincarén kiekon origokeskinen ympyrä. Osoita, että ympyrän C euklidinen säde on pienempi kuin sen hyperbolinen säde.

(5) Laske seuraavien ylemmän puolitason hyperbolisten monikulmioitten hyperboliset pinta-alat.
  (a) Δ_1: kolmio, jota rajoittavat geodeesit $\mathrm{Re}z = 0$, $\mathrm{Re}z = 2$ ja $|z-1| = 1$,
  (b) Δ_2: kolmio, jota rajoittavat geodeesit $|z| = 1$, $\mathrm{Re}z = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ja $\mathrm{Re}z = -\frac{1}{\sqrt{2}}$,
  (c) P_1: nelikulmio, jota rajoittavat geodeesit $|z| = 1$, $|z| = 2$, $\mathrm{Re}z = -1$ ja $\mathrm{Re}z = 1$.
  (d) P_2: monikulmio, jota rajoittavat geodeesit $\mathrm{Re}z = 0$, $\mathrm{Re}z = 5$, $|z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$, $|z - \frac{3}{2}| = \frac{1}{2}$, $|z - \frac{5}{2}| = \frac{1}{2}$, $|z - \frac{7}{2}| = \frac{1}{2}$ ja $|z - \frac{9}{2}| = \frac{1}{2}$.

Date: September 24, 2015.