

HYPERBOLINEN GEOMETRIA

Tehtävät 21.9. alkavalle viikolle

- (1) Olkoon $z_0 \in \mathbb{H}$ ja $r > 0$. Olkoon $C = \{z \in \mathbb{H} \mid d_{\mathbb{H}}(z, z_0) = r\}$ hyperbolinen ympyrä, jonka keskipiste on z_0 ja säde r . Etsi ympyrän C euklidinen keskipiste ja euklidinen säde.
- (2) Olkoon S ylemmän puolitasan euklidinen neliö, jonka kärkipisteet ovat $a + ib$, $a + h + ib$, $a + i(b + h)$ ja $a + h + i(b + h)$, missä $h > 0$.
 - (a) Laske neliön S euklidinen pinta-ala $A(S)$.
 - (b) Laske neliön S hyperbolinen pinta-ala $A_{\mathbb{H}}(S)$.
 - (c) Laske suhteen $A_{\mathbb{H}}(S)/A(S)$ raja-arvo kun h lähestyy nollaa.

- (3) Olkoon $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Olkoon

$$f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}, \quad z \mapsto z + a\operatorname{Im}(z).$$

Selvästi $f \notin \operatorname{Möb}(\mathbb{H})$. Osoita, että f säilyttää hyperbolisen pinta-alan.

- (4) Olkoon $0 < r < 1$ ja olkoon

$$\sigma_r: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{D}, \quad \sigma_r(t) = re^{it}.$$

- (a) Laske polun σ_r hyperbolinen pituus $L_{\mathbb{D}}(\sigma_r)$.
- (b) Laske raja-arvo

$$\lim_{r \rightarrow 0} L_{\mathbb{D}}(\sigma_r).$$

- (c) Laske raja-arvo

$$\lim_{r \rightarrow 1} L_{\mathbb{D}}(\sigma_r).$$

- (5) Olkoon $x \in [0, 1)$. Osoita, että Poincarén kiekon pisteen x hyperbolinen etäisyys origosta on

$$d_{\mathbb{D}}(0, x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$