

HYPERBOLINEN GEOMETRIA

Tehtävät 14.9. alkavalle viikolle

- (1) Olkoon \mathbb{H} kompleksitason \mathbb{C} ylempi puolitaso. Olkoot
- $l = \mathbb{H} \cap \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| = 2\}$
 - $l_1 = \mathbb{H} \cap \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| = 1\}$
 - $l_2 = \mathbb{H} \cap \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 5| = 1\}$
 - $l_3 = \mathbb{H} \cap \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) = 3\}$
 - $l_4 = \mathbb{H} \cap \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 0| = 2\}$
- (a) Piirrä hyperbolisten suorien l, l_1, l_2, l_3 and l_4 kuvat.
- (b) Määritä mitkä hyperbolisista suorista l_1, l_2, l_3 and l_4 ovat yhdensuuntaisia hyperbolisen suoran l kanssa.
- (c) Jos suora l_k , missä $k = 1, \dots, 4$, ei ole yhdensuuntainen suoran l kanssa, etsi suoran l_k ja l leikkauspiste.
- (2) Laske seuraavien polkujen hyperbolinen pituus:
- (a) $\sigma_1: [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}, \sigma_1(t) = e^t + i2e^t$
- (b) $\sigma_2: [0, 5] \rightarrow \mathbb{H}, \sigma_2(t) = t + i \cosh(t)$
- (c) $\sigma_3: [e^3, e^5] \rightarrow \mathbb{H}, \sigma_3(t) = 1 + i \ln(t)$
- (3) Määritä kussakin kohdassa (a), (b) ja (c) annettujen ylemmän puolitason pisteitten välinen hyperbolinen etäisyys.
- (a) $1 + i, 1 + 3i$
- (b) $-2 + i, 2 + i$
- (c) $1 + i, 5 + i$
- (4) Olkoon $z = x + iy \in \mathbb{H}$. Määritellään kuvaus γ asettamalla $\gamma(z) = -x + iy$. (Huomaa, että γ ei ole Möbius-kuvaus.) Osoita, että γ on ylemmän puolitason isometria.
- (5) Olkoot $z, w \in \mathbb{H}$ ja olkoon $d_{\mathbb{H}}(z, w)$ pisteitten z ja w välinen hyperbolinen etäisyys. Osoita, että

$$\tanh\left(\frac{1}{2}d_{\mathbb{H}}(z, w)\right) = \frac{|z - w|}{|z - \bar{w}|},$$

missä \bar{w} on kompleksiluvun w liittoluku.