

## HYPERBOLINEN GEOMETRIA

Tehtävät 7.12. alkavalle viikolle

- (1) Olkoon  $X$  topologinen avaruus ja olkoon  $\sim$  ekvivalenssirelaatio avaruudessa  $X$ . Olkoon

$$p: X \rightarrow X/\sim, \quad x \mapsto [x],$$

missä  $[x]$  on pisteen  $x$  ekvivalenssiluokka. Kuvaus  $p$  määrittelee tekijätopologian joukkoon  $X/\sim$ . Relaatiota  $\sim$  sanotaan *avoimeksi*, jos  $p$  on avoin kuvaus. Relaation  $\sim$  graafi on joukko

$$\{(x, y) \in X \times X \mid x \sim y\}.$$

Oletetaan, että  $\sim$  on avoin relaatio. Osoita, että  $X/\sim$  on Hausdorffin avaruus, jos ja vain jos graafi  $R$  on avaruuden  $X \times X$  suljettu osajoukko.

- (2) Olkoon  $X$  topologinen monisto ja olkoon  $G$  diskreetti ryhmä, joka toimii vahvasti epäjatkuvasti monistolla  $X$ . Osoita, että rata-avaruus  $X/G$  on Hausdorffin avaruus.

- (3) Olkoon  $k \neq 0$  ja olkoon

$$\gamma = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

jolloin  $\gamma$  on homeomorfismi  $\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ . Olkoon  $\Gamma$  kuvauksen  $\gamma$  virittämä ryhmä, jolloin  $\Gamma$  toimii avaruudessa  $\mathbb{H}$ .

- (a) Osoita, että toiminta

$$\Gamma \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$$

on vapaa ja vahvasti epäjatkuva.

- (b) Ryhmän  $\Gamma$  alkiot voidaan ajatella myös euklidisen avaruuden  $\mathbb{R}^2$  homeomorfismeiksi. Onko ryhmän  $\Gamma$  toiminta avaruudessa  $\mathbb{R}^2$  vapaa? Entä vahvasti epäjatkuva?

- (4) Olkoon  $\Gamma$  Fuchsin ryhmä, joka toimii ylemmässä puolitasossa  $\mathbb{H}$ . Olkoon  $D$  ryhmän  $\Gamma$  perusalue. Oletetaan, että  $D$  on rajoitettu hyperbolisessa metriikassa. Osoita, että rata-avaruus  $\mathbb{H}/\Gamma$  on kompakti.

- (5) Anna esimerkki topologisista avaruuksista  $X$ ,  $Y$  ja  $Z$  ja jatkuvista kuvauksista  $f: X \rightarrow Y$  ja  $g: Y \rightarrow Z$ , joille pätee:  $g \circ f$  on surjektio ja vahva kuvaus,  $f$  ei ole surjektio ja  $g$  ei ole vahva.