

HYPERBOLINEN GEOMETRIA

Tehtävät 30.11. alkavalle viikolle

- (1) Olkoon D ylemmän puolitason hyperbolinen monikulmio, jonka sivut ovat
- (a) $s_1 =$ geodeesi, jonka päätepisteet ovat 0 ja -1 ,
 - (b) $s_2 =$ geodeesi, jonka päätepisteet ovat 0 ja 1,
 - (c) $s_3 = \{z \in \mathbb{H} \mid \operatorname{re}(z) = -1\}$,
 - (d) $s_3 = \{z \in \mathbb{H} \mid \operatorname{re}(z) = 1\}$.
- (a) Piirrä monikulmion D kuva.
(b) Osoita, että kuvaukset

$$\gamma_1(z) = z + 2 \text{ ja } \gamma_2(z) = \frac{z}{2z + 1}$$

ovat monikulmion D sivuja yhdistäviä kuvauksia.

- (c) Etsi monikulmion D elliptiset syklit.
- (2) Olkoon D tehtävän (1) monikulmio.
- (a) Etsi monikulmion D paraboliset syklit.
 - (b) Osoita, että γ_1 ja γ_2 virittävät Fuchsian ryhmän Γ , jonka perusalue on D .
 - (c) Osoita, että Γ on kahden virittäjän vapaa ryhmä.

- (3) Olkoon D hyperbolinen monikulmio, jonka kärjet ovat

$$A = -\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad B = i\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad C = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ja } \infty.$$

Monikulmion D sivut ovat

- (a) $s_1 =$ geodeesi, jonka päätepisteet ovat A ja B ,
 - (b) $s_2 =$ geodeesi, jonka päätepisteet ovat B ja C ,
 - (c) $s_3 = \{z \in \mathbb{H} \mid \operatorname{re}(z) = -(1 + \frac{\sqrt{2}}{2})\}$,
 - (d) $s_3 = \{z \in \mathbb{H} \mid \operatorname{re}(z) = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\}$.
- (a) Piirrä monikulmion D kuva.
(b) Laske monikulmion kärkeä B vastaava sisäkulma.
(c) Osoita, että kuvaukset

$$\gamma_1(z) = z + 2 + \sqrt{2} \text{ ja } \gamma_2(z) = \frac{\sqrt{2}z - 1}{2z + \sqrt{2}}$$

ovat monikulmion D sivuja yhdistäviä kuvauksia.

- (4) Olkoon D tehtävän (3) monikulmio.
- (a) Etsi monikulmion D elliptiset syklit ja niitä vastaavat syklikuvaukset.

- (b) Etsi monikulmion D paraboliset syklit ja niitä vastaavat syklikuvaukset.
 - (c) Tarkista, että elliptiset ja paraboliset syklit toteuttavat vastaavat syklihdot.
 - (d) Osoita, että kuvaukset γ_1 ja γ_2 virittävät Fuchsin ryhmän Γ , jonka perusalue on D .
 - (e) Esitä ryhmä Γ virittäjien ja relaatioiden avulla.
- (5) Olkoon P ylemmän puolitason hyperbolinen monikulmio,

$$P = \{z \in \mathbb{H} \mid 1 < \operatorname{re}(z) < 2\}.$$

- (a) Osoita, että kuvaus

$$\gamma : z \mapsto 2z,$$

on monikulmion P sivut yhdistävä kuvaus.

- (b) Olkoon $\Gamma = \langle \gamma \rangle$ kuvauksen γ virittämä ryhmä. Osoita, että P ei ole ryhmän Γ perusalue.