HYPERBOLINEN GEOMETRIA

Tehtävät 23.11. alkavalle viikolle

(1) Olkoon $n > 0$. Olkoon

$$\Gamma = \{\gamma_k \mid \gamma_k(z) = e^{2\pi ik/n}z, k = 0, 1, \ldots, n-1\}.$$

Tällöin Γ on Fuchsin ryhmä. Olkoon $p = 1/2$. Osoita, että

$$D(p) = \{z \in \mathbb{D} \mid -\pi/n < \arg(z) < \pi/n\}.$$

(2) (a) Olkoon $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ kokoelma ylemmän puolitason osajoukkoja. Osoita, että seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:
   (i) Kokoelma $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ on lokaalisti äärellinen.
   (ii) Kaikilla ylemmän puolitason kompakteilla osajoukoilla K pätee $K \cap X_\alpha \neq \emptyset$ ainoastaan äärellisen monella joukolla X_α.

(b) Olkoon X_α ylemmän puolitason puolitaso ja olkoon l_α puolitason X_α määrittelevä geodeesi kaikilla $\alpha \in A$. Oletetaan, että kokoelma $\{l_\alpha\}_{\alpha\in A}$ on lokaalisti äärellinen. Osoita, että $\{l_\alpha\}_{\alpha\in A}$ on numeroituva.

(3) Olkoon $\Gamma = \{\gamma_n \mid \gamma_n(z) = 2^n,\ n \in \mathbb{Z}\}$. Ryhmän Γ Dirichlet'n monikulmio konstruoitiin edellisen viikon tehtävässä (2). Laske monikulmiota vastaavat sivuja (tai särmiä) yhdistävät kuvaukset.

(4) (a) Olkoon Γ Fuchsin ryhmä ja olkoon F ryhmän Γ perusalue. Olkoon $w \in F$. Osoita, että $F \setminus \{w\}$ on ryhmän Γ perusalue.

(b) Olkoon F Fuchsin ryhmän Γ lokaalisti äärellinen perusalue. Olkoon $z \in \mathbb{H}$. Osoita, että pisteellä z on ympäristö U ja ryhmässä Γ on äärellisen monta kuvausta $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, joille pätee
   (i) $z \in \gamma_1(\overline{F}) \cap \cdots \cap \gamma_n(\overline{F})$,
   (ii) $U \subset \gamma_1(\overline{F}) \cup \cdots \cup \gamma_n(\overline{F})$,
   (iii) $\gamma(\overline{F}) \cap U = \emptyset$, kaikilla $\gamma \in \Gamma \setminus \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$.

(5) Olkoon ξ geodeesien $\mathrm{Re}z = -\frac{1}{2}$ ja $|z| = 1$ leikkauspiste. Olkoon w piste pisteitä i ja $\xi + 1$ yhdistävällä hyperbolisella janalla, $w \neq i$, $w \neq \xi + 1$. Olkoon L_1 pisteitä $-\bar{w}$ ja $\xi + 1$ yhdistävä hyperbolinen jana ja olkoon L_2 pisteitä $\xi + 1$ ja $1 - \bar{w}$ yhdistävä hyperbolinen jana. Olkoon F ylemmän puolitason avoin joukko, jonka rajaavat geodeesit $\mathrm{Re}z = \mathrm{Re}(-\bar{w})$ ja $\mathrm{Re}z = \mathrm{Re}(1 - \bar{w})$ ja janat L_1 ja L_2 (siis joukko geodeesien välissä ja janojen yläpuolella). Osoita, että F on ryhmän $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ perusalue. Piirrä kuva.

Date: November 20, 2015.