HYPERBOLINEN GEOMETRIA

Tehtävät 16.11. alkavalle viikolle

(1) (a) Olkoot $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$. Osoita, että hyperbolisen janan $[z_1, z_2]$ keskinormaali on

$$\{z \in \mathbb{H} \mid y_2|z - z_1|^2 = y_1|z - z_2|^2\}.$$

(b) Kuvaile kohdan (a) avulla pisteitä $1 + 2i$ ja $(6 + 8i)/5$ yhdistävän hyperbolisen janan keskinormaali.

(2) Ryhmä $\Gamma = \{\gamma_n \mid \gamma_n(z) = 2^n z, n \in \mathbb{Z}\}$ on Fuchsin ryhmä. Valitse sopiva p ja konstruoi Dirichlet'n alue $D(p)$.

(3) Olkoon Γ Fuchsin ryhmä ja olkoon $p \in \mathbb{H}$ piste, joka ei ole ryhmän Γ minkään epätriviaalin alkion kiintopiste. Määritelmän perusteella ryhmän Γ Dirichlet'n alue on

$$D(p) = \{z \in \mathbb{H} \mid d_{\mathbb{H}}(z, p) < d_{\mathbb{H}}(z, \gamma(p)) \text{ kaikilla } \gamma \in \Gamma \setminus \{\mathrm{id}\}\}.$$

(a) Osoita, että

$$D(p) = \{z \in \mathbb{H} \mid d_{\mathbb{H}}(z, p) < d_{\mathbb{H}}(\gamma(z), p) \text{ kaikilla } \gamma \in \Gamma \setminus \{\mathrm{id}\}\}.$$

(b) Osoita, että

$$D(p) = \{z \in \mathbb{H} \mid \frac{|\gamma(z) - p|}{|z - p|} > \frac{1}{|cz + d|} \text{ kaikilla } \gamma \in \Gamma \setminus \{\mathrm{id}\}\},$$

missä

$$\gamma(z) = \frac{az + b}{cz + d} \text{ ja } ad - bc = 1.$$

(4) Olkoon Γ Fuchsin ryhmä ja olkoon $p \in \mathbb{H}$ piste, joka ei ole ryhmän Γ minkään epätriviaalin alkion kiintopiste. Osoita, että kokoelma

$$\{\gamma(\overline{D(p)}) \mid \gamma \in \Gamma\}$$

on lokaalisti äärellinen.

(5) Olkoon $p = ki$, $k > 1$. Osoita, että

$$D(p) = \{z \in \mathbb{H} \mid |z| > 1, -1/2 < \mathrm{Re}(z) < 1/2\}$$

on modulaariryhmän $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ Dirichlet'n alue. (Huom. todistus aloitettiin luennolla.)

Date: November 17, 2015.